

4.4.19.4. PEUT-ON PASSER DE LA NEUTRALITE A UN CAS OU CHAQUE METHODE DONNE UN RESULTAT DIFFERENT ? EXEMPLE 19E.

La réponse, pour un profil à trois projets x, y et z et à 6 votants, est non.

Ceci dit, considérons le profil suivant, toujours à 3 projets, mais à 84 votants :

22	x	y	z
11	x	z	y
21	y	z	x
8	z	x	y
22	z	y	x

La matrice des votes est :

	x	y	z	Total	Score Copeland	Nombre 1ières places
x	/	41	33	74	-2	33
y	43	/	43	86	2	21
z	51	41	/	92	0	30

Le majority winner est le projet x, le Condorcet winner est le projet y et le Borda winner est le projet z.

La dernière matrice peut encore s'écrire :

	x	y	z	Score Copeland
x	/	-1	-1	-2
y	1	/	1	2
z	1	-1	/	0

En arrangeant les lignes par score de Copeland décroissant, on obtient :

	x	y	z	Score Copeland
y	/	1	1	2
z	-1	/	1	0
x	-1	-1	/	-2

4.4.20. Conclusions

Nous allons chercher à dégager un certain nombre de conclusions des analyses qui précèdent.

Nous avons vu que souvent les trois méthodes de votes n'ont pas donné, à géométrie variable, les mêmes résultats. Cherchons à mieux cerner cette observation.

Le tableau ci-après indique pour les trois méthodes de vote, la majorité simple (MS), la méthode de Condorcet (MC) et la méthode de Borda (MB) les 15 combinaisons a priori concevables¹ :

MS	MC	MB
-	-	-
-	-	R
-	R	-
R	-	-
-	R	R
R	-	R
R	R	-
R	R	R
-	R	R ₁
R	-	R ₁
R	R ₁	-
R	R	R ₁
R	R ₁	R
R	R ₁	R ₁
R	R ₁	R ₂

Sur la base de ce tableau, on peut se poser la question si chacune de ces quinze combinaisons de résultats est possible en ce sens que l'on peut trouver pour chacune de celles-ci un profil de préférences qui dégage, en y appliquant les trois méthodes de vote, précisément la combinaison de résultats en question.

La réponse est oui. En effet, pour chacune de ces combinaisons de résultats nous avons trouvé au moins un profil des préférences qui précisément donne cette combinaison, comme l'indique le tableau suivant reprenant en première colonne les exemples parcourus.

¹ Comment lire ce tableau ? Soit la sixième ligne. Elle couvre le cas où la majorité simple et la méthode de Borda donnent chacune un résultat unique qui est de surcroît le même tandis que la méthode de Condorcet ne donne pas de résultat. Soit la dernière ligne. Elle couvre le cas où chaque méthode donne un résultat unique, mais où ces résultats diffèrent tous. Un « - » indique que la méthode en question ne donne pas de résultat unique. C'est le cas avec la majorité simple si plus d'un projet a le maximum de voix, avec la méthode de Condorcet s'il n'y a pas de Condorcet winner au sens strict et avec la méthode de Borda s'il n'y a pas de Borda winner, c'est-à-dire quand aucun projet n'a un nombre de voix supérieur par rapport au nombre de voix de chacun des autres projets.

	MS	MC ¹	MB
Exemple 4, Exemple 4a, 8a, 8b, 19A	-	-	-
Exemple 8, Exemple 11, 19B	-	-	R
Exemple 18	-	R	-
Exemple 15, 8C	R	-	-
Exemple 2, Exemple 2A	-	R	R
Exemple 17A, 17C, 19C	R	-	R
Exemple 3	R	R	-
Exemple 1, Exemple 3B, Exemple 13, 19D	R	R	R
Exemple 17, Exemple 17A, Exemple 17B	-	R	R ₁
Exemple 9, Exemple 9A, Exemple 9B, Exemple 12	R	-	R ₁
Exemple 14	R	R ₁	-
Exemple 5, Exemple 5A, 5B	R	R	R ₁
Exemple 6	R	R ₁	R
Exemple 7A, Exemple 7B, Exemple 7C, Exemple 7D	R	R ₁	R ₁
Exemples 10, 10a, 10b, 10c et 10d, 19E	R	R ₁	R ₂

Ce tableau nous montre donc que les combinaisons les plus diverses sont possibles.

On peut retenir qu'il est possible :

- que les trois méthodes donnent chacune le même résultat (cf. exemples 1, 3B et 13) ;
- que les trois méthodes donnent chacune un résultat différent (cf. exemples 10, 10a, 10b, 10c et 10d) ;
- que plus particulièrement les méthodes de Borda et de Condorcet ne donnent pas le même résultat ;²
- qu'un Condorcet winner s'il existe n'est pas forcément choisi par la méthode majoritaire ou la méthode de Borda (et d'autres méthodes par ailleurs). Notons que l'on dit qu'une fonction de choix social satisfait le critère de Condorcet si elle assure toujours la sélection d'un Condorcet

¹ Rappelons qu'un tiret '-' dans la colonne de la méthode de Condorcet est attribué s'il n'existe pas de Condorcet winner au sens qu'un projet remporte chaque comparaison bilatérale. Nous avons vu des approches pour néanmoins dégager dans pareil cas un vainqueur, en nous basant sur le score Copeland ou en recourant à la méthode de Black.

² On pourrait également dégager des résultats généraux d'impossibilité, p.ex. qu'un Condorcet loser ne peut jamais être un Borda winner. Montrez-le.

winner s'il en existe. On dit aussi qu'une telle fonction de choix social est « *Condorcet-consistent* » ;

- qu'aucune des trois méthodes ne donne de résultat (cf. exemples 4, 4a, 8a et 8b) ;
- que les méthodes de la majorité simple et de Condorcet ne donnent pas le même résultat (cf. exemples 14, 6, 7, 10) ;
- que les méthodes de la majorité simple et de Borda ne donnent pas le même résultat (cf. exemples 5, 7, 10).

Notons que nous avons en cours de route introduit d'autres méthodes de vote, à savoir la méthode de l'antipluralité (section 4.4.2.5), la méthode de Bucklin (4.4.3.6), la méthode de Nanson (section 4.4.3.7), la méthode du veto (section 4.4.3.8), la méthode de Copeland (section 4.4.8.2), la méthode de Black (section 4.4.9.1.6), la méthode du ballottage (Stichwahl, plurality run-off, section 4.4.9.1.7), la méthode de Hare (section 4.4.9.1.8), la méthode de Coombs (section 4.4.9.1.9), la méthode de l'approval voting (section 4.4.10.3) et la méthode de Kemeni-Young (section 4.4.15.2).

Force est donc de constater :

- que pour une méthode de vote donnée et peu importe laquelle, on a que, selon le profil des préférences, elle donne ou non un résultat ;
- que pour un profil de préférences donné, il arrive que différentes méthodes donnent, à géométrie variable, différents résultats, au point qu'il est possible qu'à un extrême, aucune méthode de vote ne donne de résultat et, qu'à l'autre extrême, chaque méthode de vote donne un résultat différent.

Ce dernier scénario d'après lequel il est possible que pour un profil de préférences donné, différentes méthodes de vote donnent chacune un résultat différent est particulièrement instructif et significatif. Il nous montre que, en pratique, le choix de la méthode de vote est (très) important. Mais ce choix – à un méta-niveau de la méthode même de vote - repose le même type de problématique, mutatis mutandis, que l'on vient de passer en revue.

Il est, qui plus est, même possible que pour n projets soumis au vote, l'on peut, pour chaque projet, trouver une méthode de vote qui précisément dégage comme gagnant le projet en question. Ces constats ont amené un auteur comme Donald Saari à constater que : "...an election outcome can more accurately reflect which election procedure was used rather than what the voters believe..."¹

¹ *Chaotic elections*, AMS, p. 47.

Peut-on, face à un tel constat, parler raisonnablement de l'existence de préférences a priori collectives ?¹

La réponse, a priori et à ce niveau d'abstraction, est non, ce qui, toutefois, ne signifie aucunement que la collectivité ne peut pas ou n'arrive pas à choisir. On y reviendra.

Il résulte également des résultats ci-dessus que le choix de la méthode de vote importe souvent dans la mesure où, comme nous venons de le constater, pour un profil de préférences donné, différentes méthodes, a priori sensées chacune, peuvent donner des résultats différents.

Qui plus est, chaque méthode de vote peut dégager des résultats qui peuvent apparaître comme présentant des défauts objectifs, ou des défauts au niveau de la perception subjective de chaque individu sur l'arrière-fond de ses propres préférences.

Toutefois, vouloir amender une méthode pour en éliminer un défaut est souvent source d'un autre défaut.

La méthode idéale qui à tous les coups donnerait des résultats qui ne seraient pas raisonnablement contestables n'existe pas.

C'est comme le gag classique du cinéma comique où l'on met en scène une « *voiture fantasque* » : on claque une portière, une autre s'ouvre ; on claque cette dernière, le coffre à bagages s'ouvre, on claque ce dernier et le capot s'ouvre et ainsi de suite, dans un éternel retour et si l'on persiste pour finalement maintenir tout fermé, la voiture tombe en mille morceaux. Morale de l'histoire. Ne pas chercher à tout fermer, mais se limiter à laisser ouvert l'élément dont la fermeture est considérée comme le moins important.²

Dans cet ordre d'idées, citons également Donald Saari, qui a conclu dans son livre *Chaotic Elections. A mathematician looks at voting*, AMS, 2001, comme suit :

“One of the main messages of this book is “Beware!” Beware of aggregation procedures because, in an unexpected manner, they allow unanticipated behavior. This is particularly troubling with voting. Without understanding what can happen in elections, we run the very real risk of choosing badly...”

¹ Saari note que l'origine de la complexité est la malédiction dimensionnelle (« *curse of dimensionality* »). Supposons qu'il y ait 3 projets x, y et z. Il y a six ordres individuels transitifs différents. Donc il faut, sur le plan de l'input, 6 dimensions différentes, une par ordre individuel – input – possible. Puis, il faut, sur le plan de l'output où le résultat pour chaque projet est précisé, 3 dimensions. Donc, il faut un « *espace* » à $6+3=9$ dimensions pour formaliser cette problématique.

² cf. Jean-Louis Boursin, *Des préférences individuelles aux choix collectifs*, Economica, 1995. On reviendra à cette conclusion à la section 4.8.

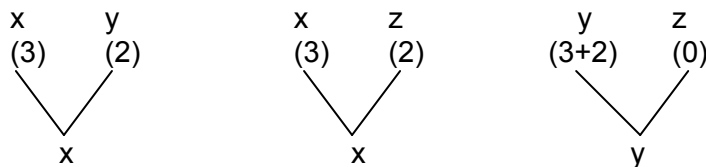
4.4.21. Précision : Analyse technique de la différence entre les méthodes de Borda et de Condorcet¹

Nous allons maintenant, en reprenant l'exemple 5 que nous avons étudié intuitivement à travers l'analogie d'un tournoi de boxe, analyser plus techniquement où se situe la différence clé entre la méthode de Condorcet et la méthode de Borda.

Rappelons le profil des préférences correspondant de l'exemple 5 où 5 votants ont les préférences individuelles ci-après par rapport à 3 projets au choix.

Groupe I	3	x	y	z
Groupe II	2	y	z	x

La méthode de Condorcet donne :



Donc x est le Condorcet winner.

La méthode de Borda avec chaque votant pouvant donner respectivement 2, 1 et 0 voix, donne :²

	x	y	z
Groupe I	3·2	3·1	3·0
Groupe II	2·0	2·2	2·1
	6	7	2

Si c'est le projet x qui le remporte avec la méthode de Condorcet, c'est le projet y qui le remporte avec la méthode de Borda.

Analysons de plus près la différence de résultat selon que l'on applique la méthode de Borda ou la méthode de Condorcet au même profil des préférences.

A cette fin, construisons une matrice avec en lignes et en colonnes les projets x, y et z, la diagonale pouvant être ignorée.

¹ Cette section a été écrite dans le contexte de la toute première version de ce chapitre. Elle est quelque peu dépassée.

² Le résultat est exactement le même si l'on prévoit 3, 2 et 1 voix. Mais avec l'hypothèse 2, 1, 0, la comparaison est plus facile.

i \ j	x	y	z
x	/		
y		/	
z			/

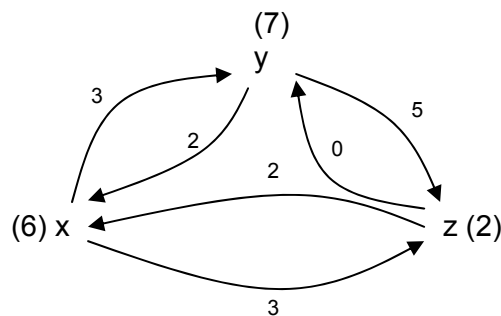
Dans les cases (i,j) avec $i = x, y, z$ et $j = x, y, z$, et avec $i \neq j$, on mettra le nombre de fois où l'on a que le projet i est rangé par un votant avant le projet j.

Prenons la combinaison (x,y). En regardant du côté des préférences individuelles, on voit que x est préféré à y par trois votants, ceux du groupe I. Donc on met dans la case (x,y) le chiffre 3.

Dans la case (x,z), on mettra également le chiffre 3 puisque x est trois préféré à z, de nouveau par les votants du groupe I.

Si on regarde (y,x), on constate que y est préféré 2 fois (les votants du groupe II) à x et ainsi de suite.

Tout en rappelant le graphique à flèches que l'on a rencontré précédemment, matrice et graphique étant deux façons différentes de représenter le même profil des préférences, la matrice prend alors l'allure suivante :



	x	y	z
x	/	3	3
y	2	/	5
z	2	0	/

Le Condorcet winner est le projet qui obtient une majorité absolue dans chacun des votes deux à deux. Pour qu'un projet obtienne une majorité

absolue face à chacun des autres projets, il doit obtenir plus de voix que l'autre projet.¹

S'il y a N votants, un projet, pour devenir le Condorcet winner, doit obtenir un nombre n de voix tel que $n > \frac{N}{2}$, et ceci pour chaque vote deux à deux.

Donc, dans notre exemple avec N = 5, un projet pour être le Condorcet winner doit recevoir $n > \frac{5}{2} = 2,5$ voix face à chaque autre projet.

Nous constatons que le projet x satisfait à cette condition comme il ressort de la première ligne de la matrice, x recevant 3 voix face à y et 3 voix face à z. Aucun autre projet n'a un chiffre supérieur à 2,5 dans chacune des cases composant sa ligne.

Le Condorcet winner est donc le projet qui, dans sa ligne, (à l'exception de la diagonale) a toujours des chiffres supérieurs à $\frac{N}{2}$, en l'occurrence des nombres supérieurs à 2,5. Tel est le cas pour le projet x.

Passons maintenant à la méthode de Borda.

En faisant la somme pour chaque ligne, on obtient :

	x	y	z	Total
x	/	3	3	6
y	2	/	5	7
z	2	0	/	2

Ces totaux correspondent aux nombres de votes dans la méthode de Borda. Le chiffre, p.ex. 6, indique que le projet x est classé par 3 votants devant le projet y et par 3 votants devant le projet z.

Donc en construisant cette matrice, on peut « définir » par rapport à celle-ci respectivement le Condorcet winner et le Borda winner comme suit :

- le Condorcet winner est un projet pour lequel les nombres dans sa ligne sont tous tels qu'ils sont supérieurs à $\frac{N}{2}$ où N est le nombre de votants ;
- le Borda winner est un projet pour lequel dans sa ligne le total des nombres y figurant est plus élevé que les totaux des autres lignes qui correspondent aux autres projets.

Le Condorcet winner n'est pas forcément le Borda winner parce que le projet qui est préféré plus souvent que non à chacun des autres projets

¹ Le nombre de confrontations bilatérales, c'est-à-dire d'un projet donné avec tous les autres se lit dans les diagonales du sud-ouest vers le nord-est, c'est-à-dire 2+3=5, 2+3=5 et 0+5=5.

(Condorcet) n'est pas forcément le projet qui devance plus souvent que tout autre, tous les autres projets (Borda).

Le nombre de points dans la méthode de Borda, on l'obtient dans notre exemple comme suit pour chacun des projets :

nombre de fois que x devance y : 3
nombre de fois que x devance z : 3

nombre de fois que x devance y ou z : 6 = nombre de votes Borda pour x

nombre de fois que y devance x : 2
nombre de fois que y devance z : 5

nombre de fois que y devance x ou z : 7 = nombre de votes Borda pour y

nombre de fois que z devance x : 2
nombre de fois que z devance y : 0

nombre de fois que z devance x ou y : 2 = nombre de votes Borda pour z

Par contre, le Condorcet winner x se caractérise par le fait que les différences suivantes soient positives :

- nombre de fois que x devance y (3) – nombre de fois que y devance x (2) > 0
- nombre de fois que x devance z (3) – nombre de fois que z devance x (2) > 0

Notez que le nombre de fois que y devance z ainsi que le nombre de fois que z devance y n'interviennent pas dans la définition du Condorcet winner, mais interviennent dans celle du Borda winner.

Si la méthode de Condorcet utilise dans la recherche du Condorcet winner toutes les informations du profil des préférences, la définition du Condorcet winner cependant n'en utilise qu'une partie de ces informations en ce sens que le Condorcet winner ne se définit pas par rapport et sur la base de toutes ses positions par rapport aux autres projets.

Dans la méthode de Condorcet, l'ordre des préférences collectives entre deux projets x et y ne dépend que de la façon dont ils se situent l'un vers l'autre au niveau des préférences individuelles sans prise en compte de la façon dont ils se situent chacun par rapport à d'autres projets.

La méthode de Borda non seulement utilise également l'ensemble des informations dans la recherche du Borda winner, mais la définition même du Borda winner se base également sur l'ensemble de ces confrontations.

4.4.22. Retour à la section 3. Le choix d'un régime fiscal.

A la section 3, nous avons identifié différents régimes fiscaux à même de générer un impôt total égal au coût de production du bien public pur dont la mise en place, compte tenu des prix de réservation des citoyens – en l'occurrence au nombre de trois – composant la société est dans l'intérêt de ces derniers.

Interrogeons-nous maintenant sur l'impact des différentes méthodes de votes sur le choix d'un de ces régimes.

Limitons-nous au régime de l'impôt fixe F, au régime de l'impôt proportionnel P et aux trois variantes d'un impôt progressif, TP1, TFP1 et TFP2.

Dans le tableau ci-après, nous rappelons pour chaque citoyen les impôts à payer selon les différents régimes fiscaux possibles :

	P ₁	P ₂	P ₃
impôt fixe (F)	3	3	3
impôt proportionnel (P)	2	3	4
impôt progressif à plus de 2 tranches (TP1)	1	2,5	5,5
flat tax 1 (TPF1)	0	3	6
flat tax 2 (TPF2)	1,5	3	4,5

Pour chaque citoyen contribuable, on a dès lors l'ordre des préférences individuel ci-après :

P₁ TPF1 > TP1 > TPF2 > P > F
 P₂ TP1 > F ~ P ~ TPF1 ~ TPF2
 P₃ F > P > TPF2 > TP1 > TPF1

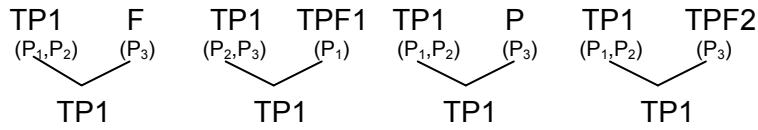
4.4.22.1 METHODE DE LA MAJORITE

Force est de constater que les régimes de la flat tax 1, TPF1, du tarif marginal de plus de deux tranches TP1 et de l'impôt fixe F obtiennent chacun une voix de sorte à ce que le vote à la majorité ne dégage pas de résultat.

4.4.22.2. METHODE DE CONDORCET

L'on peut montrer que le régime TP1 est le Condorcet winner.

En effet, on a :



4.4.22.3. MÉTHODE DE BORDA

L'on peut montrer (en supposant qu'en cas d'indifférence, les votes concernés sont répartis proportionnellement) qu'il existe un Borda winner qui est le régime du tarif marginal à plus de deux tranches, TP1.

En effet, on a :

F	P	TP1	TPF1	TPF2
0	1	3	4	2
1,25	1,25	4	1,25	1,25
4	3	1	0	2
4,25	5,25	8	5,25	5,25

4.4.22.4. CONCLUSION

Si la méthode du vote majoritaire ne dégage pas de résultat, l'on peut toutefois faire le constat – rassurant en soi – que les méthodes de Borda et de Condorcet non seulement donnent un résultat, mais que ce résultat est le même, à savoir le tarif marginal à plus de deux tranches.

Si ce résultat ne constitue pas de preuve, en tout cas il ne falsifie pas, - au contraire, il corrobore - la conjecture que dans nos sociétés modernes, il semble qu'il existe un penchant pour un impôt sur le revenu qui est progressif, mais dont la progressivité n'est ni trop élevée (à l'instar de TPF1), ni trop faible (à l'instar de TPF2).

Un autre constat très intéressant tient aux préférences et au rôle pour le choix collectif du deuxième citoyen (P_2) qui est celui dont le revenu individuel, est le même que le revenu moyen et médian de la société. (Rappelons que $R_1=20$, $R_2=30$ et $R_3=40$, donc on a $\text{revenu moyen} = \text{revenu médian} = 20 = R_1$)

Le citoyen contribuable P_2 préfère le régime du tarif marginal à plus de deux tranches TP1 à chacun des autres régimes fiscaux, entres lesquels, pour le reste, il est indifférent.

L'on pourrait dire, et on reviendra à une telle vue des choses, que le citoyen P_2 , dont le revenu est le revenu moyen et médian, constitue, en quelque sorte, l'attracteur pour le choix collectif^{1 2} ou l'électeur décisif.

4.5. Quelques paradoxes en matière de vote

Dans cette section, nous allons exposer un certain nombre de situations qui frappent particulièrement par leur aspect quelque peu contre-intuitif, voire pervers.

Ces situations souvent sont véhiculées dans la littérature sous le qualificatif de paradoxe.

Une telle appellation est légitime à condition qu'il soit précisé qu'il ne s'agit pas de paradoxes au sens strict du terme, c.-à-d. de contradictions logiquement insurmontables, mais de situations qui, d'un point de vue positif, sont contre-intuitives et de ce fait appellent une réflexion analytique additionnelle et qui, par ailleurs et d'un point de vue normatif, souvent, apparaissent comme non désirables.³

Autrement dit, ces 'paradoxes' trouvent toujours des explications de méthode. Souvent ils sont d'ailleurs sensibles à des légères modifications sur le plan des éléments constitutifs de l'analyse, profil des préférences, règles de vote, etc.

4.5.1. The « winner turns loser paradox »

Soit le profil des préférences ci-après :

Groupe I	3	t	x	y	z
Groupe II	2	x	y	z	t
Groupe III	$\frac{2}{7}$	y	z	t	x

¹ L'extrême prudence s'impose toutefois avec ce type de conclusions (a) parce qu'aucune méthode de vote n'est pas sans problèmes, qui se dégagent, à géométrie variable, selon les profils de préférences de base et que (b) les résultats sont sensibles à la liste des barèmes de taxation offerts au départ au choix et par rapport auxquels les préférences individuelles doivent se fixer. Quant aux décisions quelles options à soumettre au choix des votants, on retrouve le problème de la problématique de la régression à l'infini dont nous avons parlé à plusieurs reprises, dans ce et d'autres chapitres.

² En pratique, le plus souvent, on a que le revenu médian est inférieur au revenu moyen. Illustrons cela. Soit une société composée de 5 individus dont les revenus respectifs sont 2, 8, 10, 12 et 23. Le revenu médian (le revenu qui est tel que le nombre de revenus inférieurs à ce revenu est égal au nombre de revenus supérieurs à ce montant) est de 10 tandis que le revenu moyen est de 11. L'individu dont le revenu est le plus bas, soit 2, a un revenu égal à 20% du revenu médian et de 18,1% du revenu moyen et l'individu dont le revenu est le plus élevé, soit 23, a un revenu égal à 230% du revenu médian.

³ Bernard Walliser, dans *Comment raisonnent les économistes*, Odile Jacob, 2011, distingue de façon pertinente entre paradoxe logique, paradoxe théorique et paradoxe empirique, les paradoxes logiques étant des contradictions logiques à l'intérieur du raisonnement effectué par un modèle, les paradoxes théoriques s'exprimant comme des conséquences surprenantes d'un modèle dérivées d'hypothèses qui semblent raisonnables et les paradoxes empiriques s'exprimant à travers des conséquences testables d'un modèle en contradiction avec les observations. Les paradoxes ci-dessus sont, en règle générale, des paradoxes théoriques.

Avec la méthode de Borda, on a :

	t	x	y	z
Groupe I	3·3	3·2	3·1	3·0
Groupe II	2·0	2·3	2·2	2·1
Groupe III	2·1	2·0	2·3	2·2
	11	12	13	6

La matrice des votes est :

	t	x	y	z	Total	Score Copeland
t	/	5	3	3	11	-1
x	2	/	5	5	12	+1
y	4	2	/	7	13	+1
z	4	2	0	/	6	-1

C'est le projet y qui gagne, le projet z se classant en dernière place, l'ordre étant y x t z.

Supprimons le projet z. A priori, on pourrait s'attendre à ce que cela reste sans conséquences sur le résultat final puisque le projet z s'est classé au dernier rang collectif avec 6 voix seulement.

Après suppression de z, le profil des préférences devient :

Groupe I	3	t	x	y
Groupe II	2	x	y	t
Groupe III	2	y	t	x

La méthode de Borda donne alors :

	t	x	y
	3·2	3·1	3·0
	2·0	2·2	2·1
	2·1	2·0	2·2
	18	7	6

C'est maintenant le projet t qui l'emporte, l'ordre étant t x y.

Force est donc de constater que le retrait du projet z change fondamentalement le résultat, le gagnant initial, le projet y, étant maintenant perdant, de surcroît avec le score le plus faible et le projet t qui initialement avait seulement le troisième score est maintenant gagnant, et tout cela suite à la seule suppression du projet z.

On a donc que l'ordre collectif des trois projets restants a été complètement inversé, ayant été y x t (z) pour devenir t x y. Donc et par exemple, la

relation collective entre x et y change ; avant on a eu y x et maintenant on a x y.¹

Cet effet s'explique par le fait que la présence de z, de par les positions respectives qu'il occupe dans les préférences individuelles des votants, a un impact sur les scores Borda des autres projets.

Plus précisément, l'élimination de z profite plus à t qu'à y puisque cela fait gagner des places à t sans faire gagner de places à y, y étant toujours classé avant z.

Ce phénomène, que l'on rencontre au niveau de la méthode de Borda, on l'appelle « *The winner turns loser paradox* ».

Le « *paradoxe* » est même plus large.

Supposons que ce ne soit pas le projet z qui soit enlevé, mais le projet t.

Force est de constater que dans ce cas c'est le projet x qui le remporte.

Qu'en serait-il si on avait retiré le projet x ?

Cet exemple viole le principe dit de la « *consistency in contraction* ».²

4.5.2. « *The inverted order paradox* »

Soit le profil des préférences suivant:

Groupe I	3	z	y	x
Groupe II	2	x	z	y
Groupe III	<u>2</u>	y	x	z
	7			

Selon la méthode de Borda, on a :

	x	y	z
Groupe I	3·0	3·1	3·2
Groupe II	2·2	2·0	2·1
Groupe III	2·1	2·2	2·0
	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>

C'est le projet z qui devrait en principe l'emporter. L'ordre collectif serait z y x.¹

¹ On voit qu'on n'a pas une independence of irrelevant alternatives (« *indépendance binaire* »).

² Dans les écrits techniques, on parle aussi de la propriété α .

Or, si z l'emportait, cela déplairait assez au x membres du groupe II qui préfèrent x à z, et encore plus à ceux du groupe III qui classent z en dernière place de leurs préférences respectives.

Supposons maintenant que le groupe II arrive à introduire un projet supplémentaire t – p.ex. un candidat supplémentaire dans une élection politique – qui se positionnerait comme suit dans les préférences individuelles :

Groupe I	3	z	y	x	t
Groupe II	2	x	t	z	y
Groupe III	2	y	x	t	z

En appliquant toujours la méthode de Borda, on obtient alors :

	x	y	z	t
Groupe I	3·1	3·2	3·3	3·0
Groupe II	2·3	2·0	2·1	2·2
Groupe III	2·2	2·3	2·0	2·1
	<hr/> 13	<hr/> 12	<hr/> 11	<hr/> 6

C'est maintenant le projet x qui l'emporte.

L'introduction du projet t – qui dès le départ n'avait aucune chance de gagner comme il ressort du fait qu'il obtient avec 6 voix le nombre de voix le moins élevé – fait que le vainqueur change, x se substituant comme vainqueur à z.²

Qui plus est, l'ordre au niveau collectif des préférences est devenu $x > y > z > t$. Avant l'introduction de t, il était $z > y > x$.

Donc l'ordre initial $z > y > x$ est totalement inversé après introduction de t pour devenir $x > y > z (> t)$. Ce phénomène est appelé le « *inverted order paradox* ».

Nous pouvons renverser le raisonnement et supposer que le profil de départ est le profil avec les quatre projets pour alors retirer le projet t. On serait alors dans le cas précédent du « *winner turns loser paradox* ».

Le cas de l'inverted order paradox viole la propriété dite de la « *consistency in expansion*. »³

Pour terminer, développons un exemple encore plus élémentaire.

¹ Notons qu'il n'y aurait pas de Condorcet winner dans la mesure où l'on aurait une cyclicité. Toutefois, cela ne veut pas dire que l'on retrouve également et forcément la cyclicité au niveau collectif à travers la méthode de Borda. Cet exemple constitue une illustration de cette dernière affirmation.

² Le classement entre x et z dépend donc de la présence ou non du projet t.

³ Dans les écrits théoriques, on parle aussi de la propriété β .

Supposons que le corps électoral, disons de 100, doit décider entre un candidat clairement de gauche et un candidat clairement de droite.

Admettons que 60 électeurs préfèrent un candidat de gauche et 40 électeurs préfèrent un candidat de droite. Ce serait le candidat socialiste qui l'emporterait.

Admettons qu'il apparaît un troisième candidat, de gauche radical qui recueille 15 électeurs, les plus à gauche. Ce sera le candidat de droite qui maintenant le remportera, au grand drame, en principe, des 60 votants de gauche, constituant une majorité. Rappelons que l'hypothèse est toujours celle de votes sincères.

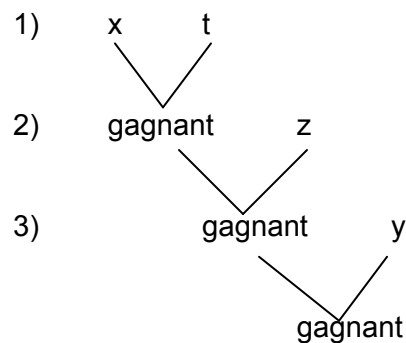
4.5.3. Le « dominated winner paradox »

Soit le profil des préférences ci-après pour les personnes A, B et C :

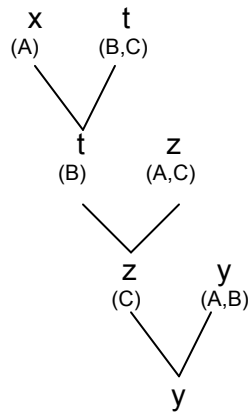
A	x	y	z	t
B	t	x	y	z
C	z	t	x	y

Supposons que ces projets soient soumis deux à deux au vote majoritaire et qu'un ordre soit fixé conformément auquel les votes deux à deux doivent avoir lieu.

Cet ordre, qui se déroule en trois étapes, est le suivant :



Cet ordre donne comme résultat :



Si donc les votes deux à deux se déroulent selon la procédure et dans l'ordre indiqué, le projet y sort gagnant.

Or, force est de constater qu'il existe un projet, en l'occurrence x, que chacun des votants préfère au projet gagnant le projet y.

Le résultat final y est donc dominé au sens de Pareto, c'est-à-dire il existe un projet, à savoir x, que tous préfèrent à y mais qui, paradoxalement, n'arrive pas à l'emporter sur le plan collectif. Autrement dit, y l'emporte, mais est dominé au sens de Pareto par x.

Ce phénomène est appelé le « *dominated winner paradox* ».

4.5.4. Le paradoxe d'Anscombe

Soit cinq personnes qui doivent décider si oui ou non trois biens publics (B_1, B_2, B_3) sont à financer par l'Etat.

Les positions de ces cinq votants sont :

	B_1	B_2	B_3
1	Oui	Oui	Non
2	Non	Oui	Oui
3	Oui	Non	Oui
4	Non	Non	Non
5	Non	Non	Non
préférence majoritaire	Non	Non	Non

Chacun des projets recueille une majorité de non, en fait 3 non et deux oui, et aucun projet ne sera financé.

Cela arrange parfaitement les votants 4 et 5 qui sont contre le financement de chacun des trois projets.

Quant aux trois votants 1, 2 et 3, la majorité des votants, on constate que chacun d'eux est frustré deux fois, puisque chacun aurait préféré que deux des biens soient financés.

Chacun de ces trois votants 1, 2 et 3 est donc du côté perdant pour une majorité des cas (deux fois sur trois fois).

Une majorité des votants perd donc dans une majorité des décisions à prendre. Ce phénomène est appelé le paradoxe d'Anscombe.

Bien évidemment, une telle constellation ouvre la voie au vote stratégique individuel, ou, à travers des coalitions qui peuvent se former, au vote stratégique collectif (cf. section suivante sur le logrolling).

Supposons que l'on serait en présence de cinq partis politiques.

Force serait de constater que la combinaison des partis P_1 , P_2 et P_3 pour chaque projet, tout en préférant chacun des projets majoritairement (si ces trois partis seuls votaient, il y aurait pour chaque projet parmi les trois une majorité), constaterait qu'aucun des projets n'est réalisé. Ceci illustre, par ailleurs, l'intérêt de former une « coalition $P_1 P_2 P_3$ » et d'imposer au niveau d'un parti une discipline de groupe et au-delà, entre les partis de la coalition une discipline interpartis.

4.5.5. Le paradoxe d'Ostrogorski¹

4.5.5.1. LE PARADOXE D'OSTROGORSKI

Soient deux partis politiques P_1 et P_2 . Les sujets thématiques politiques² qui dominent la campagne électorale sont de l'ordre de trois S_1 , S_2 et S_3 . Il y a cinq électeurs E_1 , E_2 , E_3 , E_4 et E_5 .

Chaque parti sur chacun des trois sujets S_i a une position explicitée dans son programme politique.

Le tableau ci-après indique pour chaque électeur s'il partage, pour un sujet donné, la position du parti P_1 – indiquée dans le tableau par « P_1 » – ou celle du parti P_2 – indiquée par « P_2 ».

¹ D'après Moise Ostrogorski, qui, soit-dit en passant, n'était pas trop en faveur de l'existence de partis politiques.

² p.ex. lutte contre le chômage, la politique culturelle et les questions de société (p.ex. avortement, euthanasie, etc.)

	S ₁	S ₂	S ₃
E ₁	P ₁	P ₁	P ₂
E ₂	P ₁	P ₂	P ₁
E ₃	P ₂	P ₁	P ₁
E ₄	P ₂	P ₂	P ₂
E ₅	P ₂	P ₂	P ₂

A titre d'exemple, la ligne E₃ indique que l'électeur trois partage la position du parti P₂ sur le sujet S₁ et les positions du parti P₁ sur les sujet S₂ et S₃.

Supposons qu'un électeur, en décidant de voter soit P₁ soit pour P₂, va voter pour le parti dont il partage la position sur une majorité des sujets.

Donc, à titre d'exemple, l'électeur 2 vote pour le parti P₁ car sur deux sujets, en l'occurrence S₁ et S₃, il partage la position de P₁ tandis qu'il ne partage celle de P₂ que sur un seul projet, en l'occurrence S₂.

Complétons le tableau précédent par une colonne qui indique le vote de chaque électeur conformément au critère de décision explicité.

	S ₁	S ₂	S ₃	Vote de l'électeur
E ₁	P ₁	P ₁	P ₂	P ₁
E ₂	P ₁	P ₂	P ₁	P ₁
E ₃	P ₂	P ₁	P ₁	P ₁
E ₄	P ₂	P ₂	P ₂	P ₂
E ₅	P ₂	P ₂	P ₂	P ₂

On constate donc que le parti P₁ va remporter l'élection, avec 3 sur 5 votes, donc avec 60% des votes.

Maintenant, regardons les préférences des votants par rapport aux différents sujets.

Nous constatons que, p.ex. quant au sujet S₁, 3 électeurs (E₃, E₄ et E₅) préfèrent la position de P₂ à celle de P₁.

Complétons le graphique par une ligne qui indique pour chaque sujet quel parti a une position supportée par une majorité des électeurs.

	S ₁	S ₂	S ₃	Vote
E ₁	P ₁	P ₁	P ₂	P ₁
E ₂	P ₁	P ₂	P ₁	P ₁
E ₃	P ₂	P ₁	P ₁	P ₁
E ₄	P ₂	P ₂	P ₂	P ₂
E ₅	P ₂	P ₂	P ₂	P ₂
préférence majoritaire	P ₂	P ₂	P ₂	

Force est de constater que pour chaque sujet électoral S_i ($i = 1, 2, 3$), une majorité des électeurs partage la position du parti P_2 .¹

Autrement dit, s'il était organisé pour chaque sujet un vote séparé avec règle de majorité simple, dans chaque vote ce serait la position du parti P_2 qui recueillerait une majorité.

Résumons nos constats :

- le parti P_1 remporte le vote général avec 60% des votes contre 40% pour P_2 ;
- pour chacun des (trois) sujets, une majorité des (cinq) électeurs partage la position du parti perdant P_2 .

Donc, une majorité des électeurs vote pour P_1 malgré le fait que, pour chaque sujet politique, il existe une majorité en désaccord avec la position du parti P_1 qui, pourtant, a obtenu la majorité des voix dans l'élection.

Une telle constellation est appelée le « *paradoxe d'Ostrogorski* ».

Toutes autres choses égales, les observations qui précèdent montrent que la stabilité d'un Gouvernement nouvellement élu ne dépend pas forcément uniquement de l'ampleur de sa victoire électorale, mais peut également dépendre du degré d'acceptation de son programme électoral par les électeurs, ces deux dimensions ne coïncidant pas forcément.

Autrement dit, il se peut qu'il y ait un Gouvernement élu à une majorité confortable, qui assez rapidement constatera des critiques de taille lors de l'exécution même de son programme gouvernemental.

Notons finalement que si on faisait un referendum pour chaque sujet thématique, ce serait toujours la position défendue par le parti P_2 qui l'emporterait à la majorité.

Si nous définissons 'démocratie représentative' comme l'approche où les votants doivent se prononcer pour l'un ou l'autre parti dans un vote global, le parti gagnant étant par après en charge du contenu de la politique sur le plan des sujets thématiques et si nous définissons comme 'démocratie participative' la voie directe où l'on organisera un referendum par sujet thématique, force est de constater que les politiques thématiques retenues ne seront pas forcément les mêmes.

Autrement dit, le vote majoritaire dans une démocratie représentative peut donner comme résultat l'opposé des résultats que donnerait une démocratie directe.

La différence découle de la méthode d'agrégation des préférences individuelles des votants. En démocratie directe, délibérative ou

¹ Faites le même exemple en supposant que E_4 ait les préférences $P_2 P_1 P_2$. Montrez que dans ce cas, on a pour une majorité de sujets, une majorité d'électeurs qui partage la position du parti perdant.

participative (par et pour le peuple)¹, ce sont les préférences par rapport à des sujets spécifiques qui déterminent le résultat. En démocratie représentative (pour le peuple par et à travers les pouvoirs élus ou institués ou les personnes incarnant ces derniers), les sujets sont agrégés, « *bundled* », dans les prises de position, les programmes politiques, des partis politiques.² Et comme nous venons de le voir avec le paradoxe d'Ostrogorski, les décisions collectives dans des démocraties représentatives peuvent créer des distorsions des préférences « *collectives* », ce qui, entre autres, peut être une source d'instabilité. Mais, comme toujours, il ne faut pas en déduire une « *supériorité* » de la démocratie directe, qui elle comporte ses propres problèmes. (cf. plus loin)

4.5.5.2. DEUX AUTRES EXEMPLES

4.5.5.2.1. Comment un gagnant devient perdant en présence d'un vote majoritaire

Supposons qu'il y ait 2 partis politiques Gauche (G) et Droite (D) et trois circonscriptions électorales, C₁, C₂ et C₃ avec un siège au Parlement par circonscription.

La première circonscription a 100 électeurs, la deuxième 200 et la troisième 400.

Le résultat de l'élection est :

Circonscription	Parties		Siège
	G	D	
C ₁	40	60	D
C ₂	80	120	D
C ₃	320	80	G
Total vote	440	260	G

On voit que le parti de gauche a recueilli 440 voix des 700 voix en tout, soit quelque 63% des voix, mais n'obtient qu'un des trois sièges, soit une représentation de 33% dans le Parlement.

¹ A noter l'impact possible d'une telle démocratie sur les préférences finales, avant le vote, des différents citoyens. Il est souvent affirmé que la délibération peut relativiser un certain nombre de problèmes identifiés par l'analyse des choix collectifs. Aussi est-il affirmé que la délibération peut augmenter la « *structuration* » des préférences, c'est-à-dire amenant à un certain alignement des préférences en permettant aux citoyens de mieux identifier les véritables enjeux, voire même ce n'est que par ce biais que de vraies préférences puissent se former, le concept théorique de « *true preferences* » per se n'ayant pas de correspondant réel. Cela, qui plus est, contribuerait à réduire le risque de profils de préférences cycliques.

Autrement dit, ce n'est qu'une approche délibératoire qui rend possible de vraies préférences individuelles informées et cohérentes et qui, par ce biais également contribue à une certaine structuration des préférences (« *civic republicanism* »).

² Il peut être utile de distinguer dans l'analyse selon que l'on vote sur des sujets, au sens large du terme, ou que l'on vote sur des représentants de personnes, devant dans des votes subséquents voter sur des sujets, ceci notamment s'il s'agit de représentants élus dans une démocratie (de masse) représentative.

4.5.5.2.2. Comment un gagnant devient perdant en présence d'un vote majoritaire s'il y a 3 partis

Supposons maintenant qu'il y ait 3 partis politiques, Gauche (G), Centre (C) et Droite (D). Le résultat de l'élection est

Circonscription	Parties			Siège
	G	C	D	
C ₁	35	20	45	D
C ₂	70	50	80	D
C ₃	170	180	50	C
Total	255	250	175	

Dans ce cas, le parti de gauche recueille le plus de voix, mais aucun siège. Le parti du centre qui a cinq voix en moins obtient cependant un siège tandis que le parti de droite qui n'a que 175 voix en tout obtient néanmoins deux sièges, et, partant, la majorité dans le Parlement.

On comprend avec ces deux exemples pourquoi la définition du nombre et de la géographie des circonscriptions tout comme la règle de définition du nombre de sièges par circonscription sont des questions importants, mais souvent sous-estimées par les observateurs non avertis.¹

4.5.6. Le paradoxe de Sen

4.5.6.1. UN EXEMPLE

Amartya Sen, prix Nobel d'Economie en 1998, a développé un exemple qui a généré une littérature énorme, par lequel il comptait montrer que le principe de Pareto (exprimé en termes d'unanimité) et un principe de liberté minimale, précisé par après, ne sont pas mutuellement compatibles.

¹ Une illustration est la suivante. Soit une population de 90. Une catégorie professionnelle donnée, en tout 30 personnes, habite de façon concentrée dans une zone géographique précise du pays. Si on partage le pays en trois circonscriptions électorales, on pourrait p.ex. assurer que la zone des 30 en constitue une à part ou, d'un autre côté, faire que la zone des 30 fasse à raison chaque fois d' $\frac{1}{3}$ partie

des trois circonscriptions en question. Dans le premier cas, la catégorie professionnelle des 30 (et le parti qui lui est le plus proche) aurait plus d'influence que dans le deuxième découpage où la population des 30 serait diluée dans trois circonscriptions différentes. Le découpage des circonscriptions est autant un art qu'un instrument puissant d'orientation, voire de manipulation du vote dans la main de ceux « contrôlant » la définition des circonscriptions. On parle de « *gerrymandering* » d'après le gouverneur Elbridge Gerry, qui en 1812 a obtenu une écrasante majorité en sièges à l'assemblée du Massachusetts, alors que son adversaire y était majoritaire en voix (cf. O. Ihl, *Le vote*, 2^{ème} édition, Montchrestien, 2000, p. 47).

Son exemple a été le suivant. Soient quatre projets possibles, x, y, z et t, auxquels sont confrontées deux personnes A et B :

- x : A lit un livre érotique donné¹
- y : B lit un livre érotique donné
- z : aucun des deux ne lit le livre érotique
- t : A et B lisent le livre érotique

Le tableau ci-après reprend les quatre possibilités :

		B lit	
		Oui	Non
A lit	Oui	t	x
	Non	y	z

Puis, il suppose que les préférences individuelles de A et de B par rapport à ces quatre options sont :

- A : z x y t
- B : t x y z

Sen considère que A est prude en ce sens qu'il préfère avant tout que ni lui ni B ne lisent ce livre (z) et si déjà quelqu'un doit le lire, il préfère « se sacrifier » en le lisant lui (x) plutôt que d'exposer B à une telle lecture. L'option la moins bonne à ces yeux est que lui et B le lisent (t).

B, libertaire, préférerait avant tout que lui et, surtout, B le lisent (t), mais, à défaut son second choix, en vue de ce qu'il considérerait une décrispation utile, préférerait que A le lise (x) plutôt que lui (y). Si personne ne le lisait (z), ce serait à ses yeux le plus mauvais choix possible.

Sen a alors donnée une définition du principe de liberté minimale, à savoir que chaque personne doit pouvoir décider si elle veut ou non lire le livre, donc doit pouvoir décider en relation avec sa propre personne de lire ou non le livre, et que cette préférence doit être respectée au niveau des préférences collectives et du choix social.

Autrement dit, de par la conception de la liberté que Sen a posée, les préférences de chaque personne pour ce qui concerne sa lecture ou non du livre devraient être décisives au niveau de la décision finale.

Force est de constater que l'individu A préfère y à t et z à x, donc la ligne 'Non' à la ligne 'Oui'.

Si le choix final doit respecter le principe de liberté minimale tel que formulé, il en résulte, de par les préférences de A, que ce choix final doit être tel que A doit pouvoir ne pas lire le livre.

Quant à l'individu B, il préfère t à x et y à z, donc il préfère lui lire le livre plutôt que non.

¹ Plus précisément, Lady Chatterley's Lover de D.H. Lawrence, qui, de nos jours, ne range plus guère dans la catégorie des livres érotiques.

Si le principe de liberté minimale doit être respecté, il en résulte, de par les préférences de B, que le choix final doit être tel que B doit pouvoir lire le livre.

La combinaison de ces deux exigences individuelles, découlant de l'application et du respect du principe de liberté minimale, implique que le choix final est y, la case (Non,Oui).

Toutefois, nous constatons qu'il existe une autre option parmi les trois restantes, à savoir l'option x qui est telle que A la préfère à y et que B la préfère à y (A lit et B non).

Donc, le choix de y en tout cas violerait le principe de Pareto qui dit que si un projet P_1 est préféré par chaque acteur à un projet P_2 , alors le projet P_1 est à ranger au niveau collectif avant le projet P_2 .

Force est donc de constater que le respect simultané du principe de liberté minimale et du principe de Pareto n'est pas possible, autrement dit, les deux principes sont contradictoires¹ ; on ne peut pas simultanément avoir l'un et l'autre.²

Donc, d'après Sen, le respect du libéralisme tel que défini, exigerait que A et B chacun doivent pouvoir décider s'il veut ou non lire le livre. Cela signifierait que A ne va pas (devrait pouvoir) le lire et que B va (ne devrait pas devoir) le lire. Or ce résultat, correspondant à la case y, serait inférieur au sens de Pareto, ne respecterait pas le principe de Pareto, puisqu'à la fois A et B préféreraient x à y.

En termes plus techniques, pour avoir le respect du principe de liberté minimale, il faut avoir au niveau collectif que $z > x$ et que $y > z$.

Pour avoir le respect de Pareto, il faut avoir $x > y$.

En combinant les deux, force est de constater qu'on a un cycle collectif $z > x > y > z$.

4.5.6.2. APPROCHE PLUS GENERALE

Supposons qu'il y ait quatre projets p, q, r et s.

¹ Deux affirmations sont « *contradictaires* » si les deux ne peuvent pas être vraies ni fausses en même temps. Si l'une est vraie, l'autre est fausse, et vice-versa. Deux affirmations sont 'contraires' si, toute les deux, elles ne peuvent pas être toutes les deux vraies en même temps tout en pouvant cependant être fausses en même temps.

² Salanié souligne : "Yet it has to be observed that this paradox rests on the existence of nosy preferences : A and B have simultaneous preferences that dictate not only what they prefer for themselves but also what they prefer for other members of society. It is possible to show that only in such cases does liberalism contradict the Pareto principle." (*Microeconomics of Market Failure*, MIT Press, 2000, p. 22).

Admettons que l'individu A doive être décisif quant à la relation entre les projets p et q. Autrement dit, la préférence de A quant à p et q devrait se retrouver sur le plan collectif. Admettons que A a la préférences suivante :

$$p > q$$

Admettons que l'individu B doit être décisif quant à r et s. Admettons que sa préférences est :

$$r > s$$

Donc au niveau collectif, si le principe de liberté minimale est respecté, il faudrait avoir que :

$$\begin{aligned} p &> q \\ r &> s \end{aligned}$$

Supposons maintenant que les préférences individuelles complètes de A soient :

$$s > p > q > r$$

c.-à-d. qu'il préfère s le plus et r le moins.

Supposons que les préférences individuelles complètes de B soient :

$$q > r > s > p$$

c.-à-d. qu'il préfère q le plus et p le moins.

Force est de constater qu'aussi bien A et B préfèrent $q > r$ et $s > p$, donc par la condition de Pareto, il faudrait avoir sur le plan collectif :

$$\begin{aligned} q &> r \\ s &> p \end{aligned}$$

Si les deux critères étaient remplis, le critère de la liberté minimale et la condition de Pareto, on aurait à la fois :

$$\begin{cases} p > q \\ r > s \\ q > r \\ s > p \end{cases}$$

Il en résulterait que $p > q > r > s > p$. Donc, on serait en présence d'un cycle. Autrement dit, l'ordre collectif ne serait pas acyclique, ce qui, en règle générale, est considéré comme une 'exigence minimale' de cohérence et de « *rationalité* ».

4.5.6.2. REMARQUES FINALES

L'article de Sen a suscité une vaste littérature. Une des « critiques » les plus puissantes du résultat de Sen a été présentée par le philosophe Brian Barry¹ qui a noté que la définition donnée par Sen du libéralisme n'est pas appropriée étant donné que « *Liberal principles do not say in a context like the Lady Clatterley case who should read what ; rather liberalism is a doctrine about who should have a right to decide who reads what.* » If the prude freely chooses not to – perhaps as part of a Pareto efficient deal between them – the notion that liberalism has been violated is « pure fantasy ». (cf. Hindmoor, *Rational Choice*, p. 101).

Une autre critique plus substantielle encore est le constat de Saari que l'intransitivité à laquelle aboutit Sen se réalise indépendamment que les préférences individuelles de A et de B soient transitives ou non.

4.5.7. Le paradoxe de Gibbard²

L'on peut encore mentionner à ce stade ce que l'on appelle dans la littérature le paradoxe de Gibbard et qui se nourrit d'une problématique similaire à celle du paradoxe de Sen.

Prenons l'exemple même de l'auteur de ce paradoxe et supposons qu'il y ait deux voisins A et B où chacun doit choisir la couleur à utiliser pour peindre sa chambre, et plus précisément qu'ils doivent choisir tous les deux entre le blanc (w) et le jaune (y).

Admettons par ailleurs qu'ils n'ont pas seulement une préférence quant à la couleur de leur propre chambre, mais également une préférence quant à la relation entre la couleur à eux et celle choisie par leur voisin.

Plus précisément, admettons que le voisin A préfère que les couleurs des deux chambres soient les mêmes et que, ceteris paribus, il préfère le blanc au jaune.

Admettons que B préfère que les couleurs des deux chambres diffèrent et que, ceteris paribus, il préfère le blanc au jaune.

Il y a a priori quatre combinaisons C_i possibles, à savoir :

$$\begin{aligned} C_1 &= (y,w) \\ C_2 &= (y,y) \\ C_3 &= (w,y) \\ C_4 &= (w,w) \end{aligned}$$

¹ Brian Barry, *Lady Chatterley's Lover and Doctor Fischer's Bomb's Party liberalism, Pareto optimality and the problem of objectionable preferences* dans Elster and Hylland, *Foundations of Social Choice*, Cambridge University Press, 1986.

² Par exemple, cf. John Wriglesworth, *Libertarian Conflicts in Social Choice*, Cambridge University Press, 1985, ou John Craven, *Social Choice*, Cambridge University Press, 1992.

Chaque combinaison, en première place, reprend la couleur de la chambre de A et en deuxième place la couleur de la chambre de B.

L'ordre des préférences individuelles de A est :

$C_4 C_2 C_3 C_1$

L'ordre des préférences individuelles de B est :

$C_1 C_3 C_4 C_2$

Maintenant, supposons que A a le droit de choisir entre les combinaisons qui ne diffèrent que par la couleur de sa chambre. Donc, sur la base de ce droit, A serait décisif, lui seul décide, entre C_1 et C_4 et entre C_2 et C_3 .

De même, B a le droit de choisir entre les combinaisons qui ne se distinguent que par la couleur de sa chambre. Donc B est décisif en relation avec le choix entre C_1 et C_2 et en relation avec le choix entre C_3 et C_4 .

Passons maintenant à l'analyse du choix collectif.

Force est de constater que :

- l'exercice par A de son droit
 - élimine C_1 car $C_4 > C_1$
 - élimine C_3 car $C_2 > C_3$
- l'exercice par B de son droit
 - élimine C_2 car $C_1 > C_2$
 - élimine C_4 car $C_3 > C_4$

Or, la conséquence de l'exercice de ces deux droits individuels de A et de B est que chacun des quatre projets est exclu.

Si l'investissement de A et de B des droits tels que définis a priori semble tout à fait raisonnable, l'exercice simultané par chacun de son droit aboutit à un problème de cohérence. L'exercice par chacun de son droit finit par exclure chacune des quatre combinaisons.

4.5.8. Le paradoxe de Moulin ou le « non-monotonicity paradox »

Soit le profil de préférence ci-après pour 17 votants et 3 projets :¹

Groupe I	6	a	b	c
Groupe II	5	c	a	b
Groupe III	4	b	c	a
Groupe IV	2	b	a	c

¹ Notons que les ordres théoriquement possibles mais ne correspondant à aucun ordre individuel sont a c b et c b a.

Admettons que la méthode de vote est une « *two-round election* », c'est-à-dire on garde au premier tour les deux projets qui ont le plus de voix et sort gagnant au deuxième tour celui de ces deux projets retenus qui alors obtient le plus de voix.

Au premier tour, on a 6 voix pour a, 6 voix pour b et 5 voix pour c. Donc, c est écarté. Au deuxième tour, a obtient 11 voix et b obtient 6 voix, donc a l'emporte.

Supposons maintenant que le profil de préférences change en ce sens que l'ordre des préférences des membres du groupe IV devient a b c, c'est-à-dire que l'ordre individuel de chaque votant du groupe IV est renversé en ce sens que b n'est plus préféré à a, mais que a est préféré à b. On serait tenté a priori de dire comme la position de a, le projet gagnant précédent, s'améliore encore, ce changement ne pourrait que renforcer le résultat précédent que a est le projet gagnant. Or, il n'en est rien.

Au premier tour a aura 8 voix, donc plus, contre 5 pour c et 4 pour b. Mais cette fois-ci, c'est le projet b qui est éliminé.

Au deuxième tour où participent a et c, on aura que a aura 8 votes et c aura 9 votes.

C'est le projet c qui est maintenant retenu et non plus le projet a.

Une amélioration apparente peut se transformer en source d'échec. Mieux vaut ne pas trop se renforcer.¹

L'exemple suivant illustre également cette problématique :

Soit une élection avec trois partis, le parti socialiste modéré, PM, le parti socialiste radical, PR, et le parti conservateur, C.

Admettons que les préférences individuelles des électeurs se présentent comme suit :²

34%	PM	>	PR	>	C
31%	C	>	PM	>	PR
20%	PR	>	C	>	PM
15%	PR	>	PM	>	C

A la majorité, c'est le parti PR qui emporte les élections.

Si on fait une élection à deux tours, au premier tour est éliminé le parti C qui est le moins bien placé. Au deuxième tour, c'est le parti PM qui l'emporte.

¹ cf. Salanié, *Mircoeconomics of Market Failure*, qui développe cet exemple repris de Hervé Moulin, *Axiomes of Cooperation Decision Making*, Cambridge, 1988.

² Discutez la probabilité d'un tel profil des préférences (cf. section 4.4.7.7.3).

Supposez maintenant que les membres du parti PM arrivent à convaincre les 15% dont l'ordre est PR PM C de « voter utile » et de voter au premier tour pour PM au lieu de PR.

Dans ce scénario, il est écarté au premier tour le parti PR. Au deuxième tour, entre PM et C, c'est le parti C qui l'emporte. Cette stratégie a donc été contra-productive.

Refaites le raisonnement avec le profil :

34%	PM	PR	C
35%	C	PR	PM
31%	PR	C	PM

en supposant que le pourcentage de votants avec les préférences individuelles C PR PM passe de 35% à 39% et celui des votants avec les préférences individuelles PM PR C de 34% à 30%.

4.5.9. Le « no show » paradox

Terminons par l'exemple suivant où au départ on a le profil de préférences suivant :

7	a	b	c	d
6	b	a	c	d
5	c	b	a	d
3	d	c	b	a

Supposons que la règle de vote soit la méthode de Hare introduite précédemment.

Au premier tour, le projet qui a une majorité absolue l'emporte. S'il n'y en a pas, on élimine le projet qui a le moins de voix et on recompte les voix des projets restants jusqu'à ce qu'un projet l'emporte à la majorité absolue.

Au premier tour, le projet a recueille 7 voix, le projet b 6 voix, le projet c 5 voix et le projet d 3 voix.

Aucun projet n'a une majorité absolue qui est de 11 voix. Le projet d est éliminé.

Il en résulte qu'au tour virtuel suivant, a obtient 7 voix, que b en obtient 6 voix et que ce en obtient 8 (5+3). C'est le projet b qui est éliminé.

Il reste les projets a et c. C'est le projet a qui l'emporte avec 13 voix.

Si maintenant les votants du groupe des 3 montraient le projet a de la dernière à la première place, a recevait trois premières places additionnelles.

Or, la conséquence a priori inattendue, étonnante, voire révoltante en serait que ce serait le projet b qui l'emporterait.

Changeons quelque peu le profil de préférences et supposons qu'il soit :

7	a	b	c	d
6	b	a	c	d
5	c	b	a	d
3	a	d	c	b

Montrez que dans ce cas, c'est le projet b qui l'emporterait.

Maintenant, si les trois votants du groupe des 3 ne participaient pas au vote, donc si a « perdait » trois premières places, quelque peu paradoxalement, ce serait le projet a qui l'emporterait.

On parle dans ce cas du 'no-show paradox'.

Autrement dit, mieux vaut pour la réussite du projet a qu'une partie de ceux qui en sont les adeptes ne vont pas voter, dans l'intérêt de tous le leurs et celui des autres défenseurs du projet a.

Il arrive qu'un votant s'interroge sur l'intérêt de participer au vote en estimant que cela ne sert à rien étant donné qu'il estime que son vote ne changera pas les choses.

Or ici, les choses deviennent encore plus inquiétantes dans la mesure où il arrive qu'il vaut mieux pour un votant, dans l'intérêt du projet qu'il préfère, de ne pas aller voter. Autrement dit, il soutient mieux son projet s'il renonce à exprimer son vote en faveur de ce dernier.

4.5.10. Un autre paradoxe

Soit un ensemble N_1 de 100 personnes avec le profil des préférences :

25	z	y	x
40	y	z	x
35	x	z	y

et un ensemble N_2 de 100 personnes avec le profil des préférences :

5	x	z	y
55	y	z	x
40	z	y	x

Dans le profil relatif à N_1 , avec la méthode du ballottage, c'est le projet y qui l'emporte.

Dans le profil relatif à N_2 , c'est le projet y qui l'emporte avec la méthode du ballottage, et ceci déjà au premier tour.

Si nous combinons les deux profils, avec $N=N_1+N_2=200$, on a :

40	x	z	y
95	y	z	x
65	z	y	x

Force est de constater que c'est le projet z qui va l'emporter et non plus le projet y. On dit qu'un tel résultat viole la propriété de la consistency.

4.5.11. La propriété de la monotonie

Nous venons de voir qu'il est possible que l'on soit confronté à la problématique que si le soutien à un projet augmente que cela porte préjudice aux chances de ce projet de l'emporter ou, inversement, que moins de soutien pour un projet peut se révéler propice pour sortir gagnant.

On désigne par propriété/condition de la monotonie, précisément le fait qu'une méthode de vote est telle qu'elle n'est pas exposée à la problématique ci-dessus.

Autrement dit, si une méthode de vote remplit le critère de la monotonie, on a qu'une augmentation des votes pour un projet ne sera pas défavorable à ce projet et qu'un soutien diminué n'est pas favorable.

L'absence de monotonie ouvre la voie aux votes stratégiques que l'on étudiera à la section 4.7 ci-après.

4.5.12. Les pièges possibles d'un référendum

4.5.12.1. UN PIEGE

A la section 4.4.5.1, nous avons déjà mis en évidence une problématique possible en relation avec l'instrument du référendum. Ajoutons encore quelques réflexions.

Supposons que l'on décide de tenir un référendum afin de décider si une nouvelle Constitution doit être adoptée.

Admettons que chaque votant définit ses propres préférences par rapport à trois positions qui finissent par dominer le débat public :

x : dire oui à la nouvelle constitution ;

y : dire non à la nouvelle constitution, en vue que l'actuelle constitution puisse être renégociée pour devenir plus sociale ;

z : dire non à la nouvelle constitution en vue que l'actuelle constitution puisse être renégociée pour devenir plus libérale.

Supposons que, finalement, la population finira pour se répartir comme suit :

Groupe I	45	x y z
Groupe II	35	y x z
Groupe III	20	z x y

Dans le referendum à la question « *Voulez-vous la nouvelle constitution proposée* », ce sera le « *non* » qui l'emportera avec 55 voix contre 45 pour le « *oui* ».

Force est toutefois de constater que le « *non* » ne repose pas sur une raison homogène, 35 voulant une constitution plus sociale, 20 voulant une constitution plus libérale, donc 55 voulant en soi un changement.

Si la question était « *Voulez-vous une autre constitution* » - sans préciser le changement – alors on aurait eu une majorité pour le changement, c'est-à-dire contre le statu quo. Il faudrait encore, dans une deuxième question ou deuxième étape, définir quel changement. Si on soumettait alors au referendum deux projets, un projet plus libéral et un projet plus social, on aurait, sur la base du profil des préférences ci-dessus, que le projet y l'emporterait.

Si on appliquait la méthode p.ex. de Borda, on aurait le résultat suivant :

x	y	z
45·2	45·1	45·0
35·1	35·2	35·0
20·1	20·0	20·2
145	115	40

Ce serait le « *oui* » qui clairement l'emporterait.¹

4.5.12.2. UN DEUXIEME PIEGE

Supposons qu'il y ait deux projets x et y qui sont soumis ensemble à un référendum. Il y a trois votants A, B et C.

¹ Refaites l'exemple avec :

30	Groupe 1	x y z
15	Groupe 2	x z y
30	Groupe 3	y x z
15	Groupe 4	z x y
10	Groupe 5	z x y

Le référendum sur les deux projets signifie que chaque votant, dans le même référendum, doit dire oui ou non quant au projet x et oui ou non quant au projet y.

Supposons que les préférences respectives des votants sont (O :oui ; N :non) :

A	O/N	N/O	O/O	N/N
B	N/O	O/O	O/N	N/N
C	N/N	N/O	O/N	O/O

Dans le référendum, on aura le résultat suivant :

Projet x	Projet y
Oui : 1 (A)	Oui : 1 (B)
Non : 2 (B,C)	Non : 2 (A,C)

Le résultat est que ni x ni y seront réalisés.

Force est toutefois de constater que $\frac{2}{3}$ des votants, soit A et B, classent le résultat N/N en dernière place de leurs préférences respectives.¹ (Les conclusions seraient-elles différentes s'il y avait deux référendums séparés ?)

4.5.13. Le paradoxe de McKay²

Soient 5 projets x, y, z, t et f et quatre votants A, B, C et D.

Le profil des préférences est :

A	x	y	z	t	f
B	f	x	y	z	t
C	t	f	x	y	z
D	z	t	f	x	y

Introduisons deux définitions :

- un projet α est dit dominer un projet β si tous les N votants sauf un, donc (N-1) votants, placent le projet α devant le projet β dans leurs respectifs ordres individuels ;
- une méthode de vote est dite vicieuse si elle comporte la possibilité que si un projet α domine un projet β , le projet β , dominé, se classe toutefois devant le projet α dans l'ordre collectif.

Par rapport à notre profil des préférences, on fait deux grandes constatations.

Premièrement, on constate que :

¹ cf. Hodge and Klima, *The Mathematics of Voting and Elections*, AMS, p. 170.

² cf. J.-L. Boursin, *Les Paradoxes du Vote*, Odile Jacob, p. 73.

y domine z
z domine t
t domine f
f domine x

Deuxièmement, on a un projet qui est unanimement préféré à un autre, à savoir :

x est unanimement préféré à y

Si nous voulons maintenant qu'au niveau collectif il soit pris en compte le fait que x est unanimement préféré à y, alors inévitablement on a un cycle :

x y z t f x

De façon générale, McKay a montré le résultat d'impossibilité ci-après :

Il n'existe pas de méthode de vote qui permet de classer tous les projets et qui, simultanément, remplit les trois caractéristiques ci-après :

- (1) l'universalité, en ce sens que chaque votant est libre de ses préférences parmi les projets au choix ;
- (2) l'unanimité en ce sens que si tous les votants préfèrent un projet α à un projet β , le classement collectif respecte cette relation ;
- (3) l'absence de caractère vicieux, en ce sens qu'il n'arrive jamais qu'un classement entre deux projets voulus par N-1 votants ne soit pas reflété dans l'ordre collectif se dégageant de la méthode en question.

4.5.13.1. UN PARADOXE (PAS VRAIMENT) D'UN AUTRE TYPE

4.5.13.1.1. Exemple a¹

Supposez qu'une partie ait perdu un procès et fasse appel. La Cour d'appel est supposée être composée de trois juges.

La partie en question avance deux arguments A_1 et A_2 justifiant selon elle une révision du jugement de première instance.

Un premier juge J_1 considère l'argument A_1 acceptable mais rejette l'argument A_2 .

Un deuxième juge J_2 considère l'argument A_2 acceptable mais considère l'argument A_1 comme non recevable.

Un troisième juge J_3 estime que les deux arguments évoqués A_1 et A_2 ne sont pas valables et il estime que le recours est à rejeter car non fondé.

Le profil des préférences des trois juges est (O : argument accepté ; N : argument non accepté) :

	A_1	A_2
J_1	O	N

¹ Cet exemple est inspiré de Ward Fransworth, *The Legal Analyst*, Chicago Press, 2007.

considérées comme vérifiées de sorte qu'il en découle la conclusion que l'accusé est coupable.

Selon la procédure retenue, le résultat est différent.¹

4.6. Caractéristiques des méthodes de vote et exigences à des méthodes de vote raisonnable

Nous avons défini et analysé différentes méthodes de vote, mis en évidence des paradoxes, touchant, à géométrie variable, les différentes méthodes de vote ainsi que les caractéristiques structurelles de ces dernières et nous avons intuitivement senti qu'il existe certaines caractéristiques que l'on pourrait considérer comme devant être utilement respectées par chaque méthode de vote que l'on serait amené à qualifier de raisonnable comme l'absence d'un dictateur, la monotonie, ne jamais 'couronner' un Condorcet loser, toujours 'couronner' un Condorcet winner, indépendance binaire, etc..

Dans cette section, fort de ces analyses et de ces constats en découlant, nous allons inverser quelque peu l'optique en ce sens que nous allons, dans une première étape, identifier, postuler des caractéristiques, principes, conditions, exigences, axiomes – on précisera ces termes par après – que l'on pourrait postuler comme devant être respectés par chaque méthode de vote que l'on appellerait acceptable (le terme « acceptable » en quelque sorte serait défini par ces axiomes)², pour, dans une deuxième étape, analyser dans quelle mesure certaines des méthodes de vote rencontrées précédemment remplit l'ensemble de ces critères/caractéristiques/axiomes.

Nous allons avant de ce faire (section 4.6.3) présenter deux autres résultats importants et qui nous permettent par ailleurs d'illustrer l'approche en question, à savoir le théorème de May en relation avec le vote majoritaire et le théorème de Young en relation avec la méthode de Borda.

4.6.1. Le théorème de May

Il existe différentes formulations du théorème de May. Nous en allons donner une présentation simplifiée.

D'abord une convention de notation très utile. Soit deux projets x et y soumis au vote. Cela couvre également la possibilité que x =faire qch et y ne pas faire cette chose.

¹ cf. P. Engel, « *Croyances collectives et intentions partagées* », *Leçons de Philosophie Economique*, Tome I, Economica, 2005.

² Comme il est d'usage dans cette littérature d'utiliser le terme d'axiome, nous en faisons de même. Il importe toutefois d'être prudent en ce sens que souvent il n'y a pas lieu de mettre l'utilisation qui en est faite dans cette littérature à un même niveau que celle qui est faite dans les mathématiques. (cf. à ce sujet Donald Saari. *Decisions and elections*, Cambridge University Press, 2001, p. 213).

On définit la fonction S_i qui, pour chaque votant i donne, avec $i=1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} S_i &= 1 && \text{si } x \text{ est préféré à } y \text{ par } i \\ S_i &= 0 && \text{si } i \text{ est indifférent entre } x \text{ et } y \\ S_i &= -1 && \text{si } y \text{ est préféré à } x \text{ par } i \end{aligned}$$

La séquence des S_i que l'on obtient de la sorte, on va en dégager la grandeur S telle que :

$$S = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n S_i > 0 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n S_i = 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{i=1}^n S_i < 0 \end{cases}$$

Le théorème de May dit que les conditions de la « *decisiveness* » (« *unrestricted or universal domain* »), de l'anonymité, de la neutralité et de la monotonie (« *croissance stricte* », « *positive responsiveness* ») sont nécessaires et suffisantes pour qu'une méthode d'agrégation sociale soit la méthode de la majorité (simple) (pluralité).

Autrement dit, d'après le théorème de May, la seule méthode de vote qui satisfait simultanément ces quatre critères – d'aucuns diraient axiomes – est la méthode de la majorité.

La condition de l'universal domain ou decisiveness signifie que la fonction dégage un résultat pour n'importe quelle séquence des votes S_i .

Autrement dit, le résultat ne dépend pas de qui fait quel vote. Si S_i est une séquence de votes et S' est une permutation de S , alors $f(S)=f(S')$.

La condition de l'anonymat signifie que la méthode traite tous les votants de façon égale, c-à-d si deux votants 'échangeaient' leurs voix, rien ne changerait. Si un votant choisi x et un deuxième y , le résultat ne serait pas affecté si c'était le premier qui choisissait y et le deuxième qui choisissait x .

La condition de la neutralité signifie que si tous les votants changent d'avis (on exclut les abstentions), le résultat est inversé. Si S est une séquences et S' une séquence de même longueur, mais où chaque S'_i est l'opposé du S_i correspondant, alors $f(S')=-f(S)$.

La condition de la monotonie ou positive responsiveness signifie que si un votant changeait d'avis pour soutenir maintenant un projet α devant son choix de départ, cela ne serait pas au désavantage pour le projet α .¹ Si $f(S) \geq 0$ et chaque composante de la série S' est égale à la composante correspondante de la série S , à l'exception d'une qui est plus grande que la composante correspondante de S , alors si $f(S) \geq 0$, alors on a $f(S')=1$.

¹ Nous renvoyons pour la démonstration de ce théorème à Hodge and Klima, *The Mathematics of Voting and Elections*, AMS, 2005, à Gaertner W., *A Primer of Social Choice Theory*, Oxford University Press, 2009, à J.L. Boursin, *Les Paradoxes du vote*, Odile Jacob, 2004, ou à Dennis Mueller, *Public Choice III*.

On peut encore montrer¹ que les axiomes de May constituent un cas spécial des conditions qu'Arrow a posées dans le cadre du dégagement de son fameux théorème d'impossibilité (cf. plus loin).

On pourrait donc argumenter comme si, en passant d'un constat positif à une conclusion normative : « *Je veux qu'une méthode de vote satisfasse ces axiomes et comme la méthode de la majorité est la seule à les satisfaire, il y a lieu de recourir à cette méthode.* »

4.6.2. Le théorème de Young²

4.6.3.

[publié plus tard]

4.7. Le vote stratégique

Dans les sections précédentes, nous avons supposé que chaque votant exprime ses votes conformément à ses préférences individuelles effectives ; on dit aussi qu'il vote « *sincèrement* ». Partant dans les développements ci-dessus, voter revenait in fine à révéler ses véritables préférences.

A été donc exclu la possibilité qu'un votant « *déclare* » à travers le vote des préférences qui ne sont pas ses préférences effectives (« *true preferences* »³), c'est-à-dire on a exclu qu'il vote de façon stratégique.

Nous allons dans cette section repasser en revue certains des exemples de la section 4.4 pour voir si un vote stratégique relève du possible et, si tel est le cas, quelles peuvent en être les conséquences sur les résultats.

Par la suite, on ne suppose plus que le profil du vote reflète exactement le profil des préférences, mais l'on prévoit la possibilité que le vote est un acte autonome qui certes est influencé par les préférences mais n'en est pas un reflet « *purement mécanique* ».

Voter stratégiquement peut couvrir deux réalités.

Premièrement, la possibilité – appelée aussi vote sophistiqué – que le votant en décidant de son choix décide en fonction d'une anticipation quant à l'interaction de son choix avec les autres votants, sans toutefois entrer en contact avec ces derniers. Le vote stratégique ici est un acte non coopératif. Dans ce contexte, un concept important est celui de stratégie dominante. Deuxièmement, la possibilité que différents votants se

¹ cf. Kenneth Shepsle, *Analyzing Politics*. Second edition, Norton, 2010, p. 80. Ce livre constitue une introduction excellente à l'analyse politique.

² cf. p.ex. Shmuel Nitzan, *Collective Preference and Choice*, Cambridge University Press, 2010 ou Weimann, *Wirtschaftspolitik*, 5. Auflage, Springer 2009.

³ D'aucuns contesteraient la signification d'un tel concept.

concertent pour décider ensemble comment voter. Le vote stratégique ici devient un acte coopératif. Dans ce contexte, deux concepts importants sont ceux de « *core* » et de « *coalition* ».

Notre analyse sera extrêmement sommaire.¹ Dans la majorité des exemples, nous n'allons pas mener l'analyse jusqu'au bout, faute de disposer et malgré le chapitre 3 de tous les instruments nécessaires, notamment de la théorie des jeux respectivement non coopérative et coopérative et à défaut d'avoir le bénéfice de l'analyse de la problématique des informations asymétriques qui fait l'objet du chapitre 8.

A la fin de cette section, on présentera un théorème très important, à savoir le théorème de Gibbard-Satterthwaite.

On se limitera donc à donner quelques exemples de votes stratégiques pour ainsi illustrer la problématique, ceci après avoir encore apporté quelques précisions en relation avec la problématique très importante en relation avec la question qui a à quel moment quelles informations.

4.7.1. Une précision très importante

Une problématique clé porte sur les informations dont dispose chacun des votants sur les ordres individuels de préférence des autres votants.

A priori, les préférences de chacun constituent une information privée étant donné qu'il n'est pas téméraire de considérer que lui seul connaît ses préférences et lui seul peut décider ou non de les faire savoir.

Ceci dit, nous allons cependant supposer que chacun connaît les profils individuels des autres votants. Cette hypothèse est quelque peu héroïque, mais elle permet de mieux aborder la problématique du vote stratégique.

L'hypothèse extrême opposée aurait été qu'aucun votant ne connaisse les profils (quoique ce soit des profils) des autres votants.

Entre les deux extrêmes, il y a différentes situations intermédiaires de niveau d'information avec, de surcroît, la possibilité très importante d'informations asymétriques, c.-à-d. que les uns savent autre chose que les autres ou autrement que les degrés informationnels des acteurs ne sont pas identiques.

4.7.2. Exemple 3 du point 4.4.3.8

Nous avons constaté que pour le profil des préférences

¹ Dans une version ultérieure de ce chapitre, on développera plus cette section.

A	x	y	t	z
B	x	y	t	z
C	y	x	t	z

le projet x l'emporte à la méthode de Borda si le vote était non stratégique. Les scores de Borda respectifs sont :

	x	y	t	z
A	3	2	1	0
B	3	2	1	0
C	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{0}$

Cela arrangerait parfaitement A et B mais moins le votant C qui lui préférerait le projet y à x.

Supposons que C ne déclare pas son véritable ordre individuel $y x t z$, mais qu'il déclare $y t z x$, c.-à-d. qu'il mette le projet x au dernier rang de son vote effectif.

On aurait dans ce scénario comme résultat du vote un résultat différent de celui qui correspondrait à des votes sincères, soit :

	x	y	z	t
A	3	2	1	0
B	3	2	1	0
C	$\frac{0}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{1}$

Ce serait le projet y qui l'emporterait, ce qui serait dans l'intérêt de C.

C aurait-il dès lors une incitation à voter de façon stratégique ?

La réponse est oui. Il constate que s'il votait $y t z x$ et si les autres votaient chacun « *sincèrement* » $x y t z$, alors c'est y qui l'emporte.

Mais C peut-il s'attendre à ce que les autres votent 'sincèrement' ou doit-il anticiper, en fixant son choix, qu'ils votent autrement ?

Et comment réfléchit, avant de voter, chacun des deux autres, qui ont, en l'occurrence. chacun le même ordre individuel ?

A et B chacun, connaissent les préférences de C, de par notre hypothèse introductives, et ils peuvent dès lors anticiper l'intérêt pour C de voter de façon stratégique.

A et B vont, dans ce contexte, chacun constater que chacun d'eux constate que s'il ne votait non plus pas sincèrement mais s'il déclarerait

x t z y

donc mettrait le projet y préféré par C au dernier rang de son propre vote, le résultat serait :

- Si C votait sincèrement :

	x	y	z	t
A	3	0	1	2
B	3	0	1	2
C	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{4}$

et

- Si C ne votait pas sincèrement :

	x	y	z	t
A	3	0	1	2
B	3	0	1	2
C	$\frac{0}{6}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{5}$

Dans les deux cas, que C vote sincèrement ou non, si A et B chacun ne vote pas sincèrement, en mettant chacun le projet y en dernier rang, ce sera le projet x qui l'emportera.

Il s'ensuit que A et B chacun ont a stratégie dominante, voter x t z y, ce qui va assurer que, quoique fasse C, c'est leur projet préféré x qui l'emporte.

Dans cet exemple, il y a certes vote stratégique sans que toutefois, ce qui n'est pas un résultat général, le résultat final ne change.

En fait, A et B chacun vont constater qu'ils ont intérêt à voter de façon sophistiquée, à savoir x t z y.

Ce vote stratégique est pour chacun une stratégie dominante, peu importe que C vote sincèrement ou vote y x z t, ce sera x qui l'emportera, sachant qu'un autre vote stratégique n'est pas dans l'intérêt de C.

Donc, un vote possible sera :

A	x	t	z	y
B	x	t	z	y
C	y	z	t	x

Notons que le vote stratégique par A et B $x t z y$ constitue sa stratégie dominante de sorte que l'on a un équilibre en stratégies dominantes dans un jeu non coopératif.

Dans cet exemple, et exceptionnellement, on a qu'un jeu coopératif donnerait un résultat qui serait le même.

Aussi, si A et B formaient-ils une coalition décidant ensemble de voter $x t z y$, chacun aurait intérêt à ce faire et aucune autre coalition n'arriverait à déstabiliser la coalition (A,B) puisqu'aucun membre, ni A ni B, n'aurait intérêt à quitter cette coalition.

4.7.3. Exemple 2 du point 4.4.2.

L'exemple 2 nous a montré que la majorité simple ne dégage pas de gagnant étant donné si chaque votant donne sa voix au projet qu'il préfère effectivement le plus, chaque projet finit pas recueillir une voix.

Supposons maintenant que B préférerait qu'il se dégage un projet gagnant et qu'il préfère que ce dernier soit le meilleur possible pour lui dans les circonstances données.

Si B décide alors de ne pas voter pour le projet y, le projet qu'il préfère le plus, mais de voter pour le projet x, celui qu'il range en deuxième place de ses préférences, c'est le projet x qui obtient la majorité simple, avec 2 voix. Si C fait de même, c'est-à-dire vote pour x au lieu de z, x obtient même trois voix.

Si donc B et/ou C donnent leurs voix à un autre projet que celui que chacun préfère le plus, le vote à la majorité simple va donner un résultat unique contrairement au cas où aucun des votants ne voterait de façon stratégique.

Regardons maintenant du côté de la méthode de Condorcet. On a vu que si personne ne vote de façon stratégique, c'est le projet x qui est le Condorcet winner.

Si maintenant B, qui préfère y à x, va dans le cas où x serait confronté à z, voter pour z au lieu de y (il préfère y à z), alors z l'emportera à la majorité simple face à x. Il en résulte que x ne sera plus le Condorcet winner.

B ne peut certes pas faire passer son projet préféré y, mais en votant de façon stratégique, il peut bloquer le projet x qui serait le Condorcet winner en l'absence de vote stratégique.

Dans la méthode de Borda, B pourrait également bloquer x en donnant 2 voix à z et 1 à x au lieu de 1 à z et 2 à x.

4.7.4. Exemple 4 du point 4.4.4.

4.7.4.1. ANALYSE

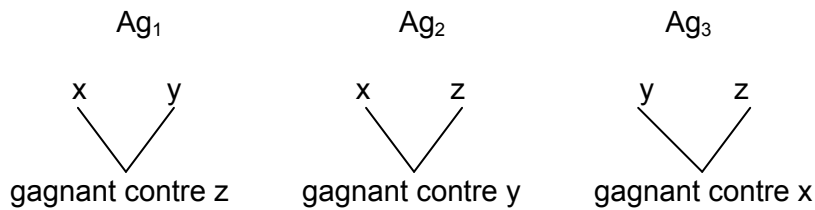
Dans l'exemple 4, on a fait le constat qu'il n'existe pas de Condorcet winner parce que l'ordre des préférences est cyclique.

Rappelons qu'une telle cyclicité ouvre la voie à la manipulation du vote.

Supposons que la méthode de Condorcet se déroule en pratique comme suit.

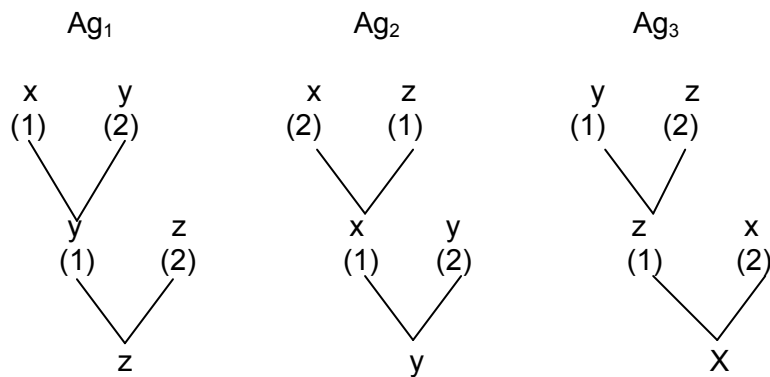
On oppose d'abord deux projets, puis on oppose le projet gagnant au projet restant.

Il existe trois façons d'organiser cette suite, ce que l'on exprime en disant qu'il y a a priori 3 agendas différents possibles, Ag_1 , Ag_2 et Ag_3 .



Par exemple, choisir l'agenda 2 (Ag_2) revient à confronter dans un premier tour x à z sur la base de la majorité absolue et ensuite, dans un deuxième tour, à confronter le gagnant au projet restant qui est y.

Force est de constater que ces trois agendas ne dégagent pas le même résultat final. En effet



A chacun de ces agendas correspond un autre projet gagnant.

Supposons maintenant que c'est B qui peut fixer l'agenda.

Comme B préfère le projet y, il a intérêt à choisir l'agenda 2 puisque cet agenda fait que précisément le projet y l'emporte.

Donc en fixant le « *bon agenda* », celui qui contrôle l'agenda, en l'occurrence B, peut « *orienter* » le résultat d'après ses propres préférences, en l'occurrence le projet y.

La morale de ce constat est « *Beware of the agenda* ». Le résultat du vote n'est pas décidé sur la base des votes mêmes mais, en amont, au niveau du choix de la procédure déterminant le déroulement des différentes phases du vote.

Il existe donc, à travers le choix de l'agenda, choix qui se situe avant même l'expression des votes par les votants, une possibilité de manipuler le résultat.

Qui plus est si un résultat se dégage, ce résultat ne peut être qu'un résultat « *manipulé* » ou, au mieux, un résultat dû au hasard lié à un choix aléatoire de l'agenda ou tout simplement un résultat dû à l'ignorance dans le chef des acteurs de l'importance clé, pour le résultat final de l'agenda.

Notons que cette problématique à proprement parler ne relève pas de celle du vote stratégique, mais se situe à un niveau supérieur, au méta-niveau du choix stratégique de l'agenda. Qui décide qui décide de l'agenda !¹

Toutefois, le raisonnement ne s'arrête pas ici dans la mesure où par rapport à un agenda retenu, peu importe lequel, des votes stratégiques sont possibles.

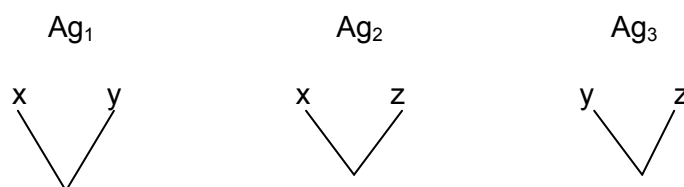
Le votant A n'aime pas du tout le projet y qu'il range en dernière place. Au premier tour de l'agenda 2 où x est confronté à z, A pourrait ne pas voter pour x, qu'il préfère effectivement à z, mais voter stratégiquement pour z. Alors z l'emporterait au premier tour et serait confronté à y. Si maintenant le vote entre z et y se fait sans vote stratégique, alors z gagne.

A aurait ainsi réussi à faire passer z plutôt que y, ce qui serait pour lui préférable compte tenu de ses préférences.

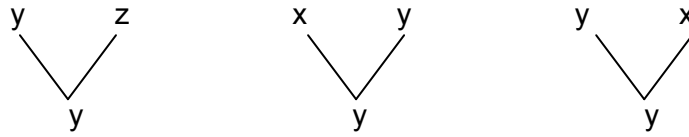
Toutefois, un autre votant pourrait faire un raisonnement, mutatis mutandis, identique et ainsi de suite et on est en pleine théorie des jeux, non coopératifs si les votants ne peuvent pas 'coopérer', théorie des jeux coopérative s'ils peuvent coopérer de façon indivisible.

Rappelons que dans les exemples 1 et 2 de la section 4 (4.4.1. et 4.4.2.), le problème de l'agenda ne se pose pas, parce qu'il n'y a pas de cyclicité.

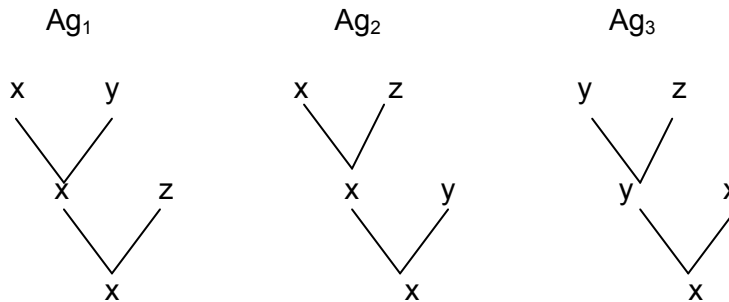
Dans l'exemple 1, chaque agenda possible donne toujours le même résultat, comme il en découle de la comparaison des trois agendas possibles.



¹ et ainsi de suite. Comment éviter la régression à l'infini? Qui contrôle le contrôleur ?

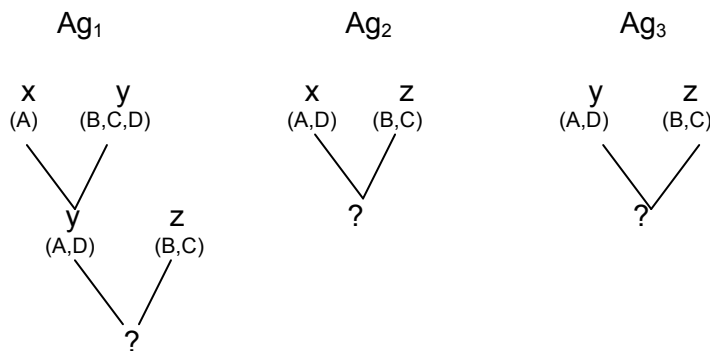


Dans l'exemple 2, il en est de même.



L'explication de ceci est que la problématique de l'agenda setting ne se pose que si les préférences collectives sont cycliques, donc s'il y a absence de Condorcet winner.

Regardons encore l'exemple 13 (section 4.4.13.). Là on a :



Il n'y a pas de possibilité de manipulation de l'agenda tout simplement parce que les trois agendas aboutissent chacun à une impossibilité de décision, à moins qu'il existe une autorité, p.ex. le Président du groupe qui, en cas d'ex aequo, c'est-à-dire en cas d'égalité des voix, peut « briser » le match nul. Les préférences collectives ne sont pas transitives sans que cette fois-ci il y ait également cyclicité.

4.7.4.2. UNE APPLICATION

L'application suivante permet d'illustrer les phénomènes de l'agenda setting et du vote stratégique ainsi que l'interaction possible entre les deux.

Soit un inculpé auquel il est fait le procès pour un crime donné. On suppose qu'il y ait deux peines a priori possibles pour le crime en question, à savoir la peine de mort et la peine de prison à vie.

Supposons de même qu'il existe a priori trois procédures différentes selon lesquelles trois juges composant le tribunal pourraient aboutir à leur décision finale :

- selon une première procédure, il est décidé par les juges dans une première étape si l'inculpé est coupable ou non. Puis, dans une deuxième étape et à condition que lors de la première étape, la culpabilité soit constatée, il est décidé par les juges quelle peine à appliquer.
- selon une deuxième procédure, les juges doivent décider dans une première étape de la peine appropriée, la peine de mort ou la peine de prison à vie, au type de crime présumé. Dans une deuxième étape, ils décident si l'inculpé est coupable ou non. S'ils décident que oui, alors la peine décidée lors de la première étape s'applique.
- selon une troisième procédure, après avoir entendu les évidences, les juges décident dans une première étape si la peine la plus élevée, la peine capitale, est à appliquer. Si leur conclusion est oui, la peine de mort s'applique. Si par contre leur conclusion est non, alors l'on passe à une deuxième étape. Si la décision est de nouveau non, l'inculpé est déclaré non coupable, sinon il est condamné à la peine de prison à vie.

La différence entre ces trois procédures de jugement est une différence d'agenda.

Supposons que les trois juges (A, B et C), après avoir entendu les évidences et compte tenu de leurs appréciations personnelles notamment quant à l'aspect moral de la peine de mort, aient, au départ de la procédure, les préférences personnelles suivantes quant au jugement final (M : peine de mort ; EV : emprisonnement à vie ; NC : non coupable) :

Juge A	M	EV	NC
Juge B	EV	NC	M
Juge C	NC	M	EV

Le premier juge est le plus sévère. Il considère l'inculpé coupable et il n'a pas d'hésitations à prononcer la peine de mort pour le crime en question.

Le deuxième juge considère que l'inculpé est coupable. Toutefois, il déteste, p.ex. pour des raisons de conviction morale, de prononcer une peine de mort, et ceci au point que devant le choix dual de condamner, d'un côté, quelqu'un qu'il estime coupable à la peine de mort et, de l'autre côté, de libérer quelqu'un qu'il reconnaît coupable pour éviter la peine de mort, il préfère la deuxième option.

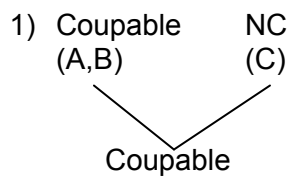
Le troisième juge considère que l'inculpé n'est pas coupable. Dans le cas où néanmoins une peine serait à appliquer parce qu'une majorité de juges

déciderait la culpabilité, il préférerait la peine de mort à l'emprisonnement à vie, p.ex. parce qu'il est dans son for intérieur de l'opinion qu'un emprisonnement à vie est pire que la peine de mort.

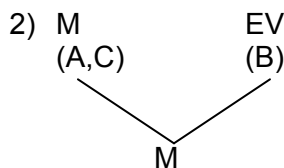
On suppose que les décisions se prennent dans le collège des juges à la majorité.

Analysons, sur la base du profil des préférences des juges, si les différentes procédures dégagent le même résultat final.

- a) Si on applique le premier agenda où les juges doivent d'abord décider si l'inculpé est coupable ou non et ensuite, dans le cas où il serait déclaré coupable, quelle peine à appliquer, à savoir M ou EV, le résultat final, en supposant qu'aucun juge ne vote stratégiquement, sera :



La majorité des juges ayant déclaré l'inculpé coupable, la deuxième décision porte alors sur la peine à appliquer.



Force est de constater que par rapport au choix entre la peine de mort et la peine à vie, c'est la peine de mort qui le remporte.

C'est donc la peine de mort qui sera le résultat du procès puisque dans une première étape le jugement majoritaire est que l'inculpé est coupable et que dans la deuxième étape, une majorité se prononce pour la peine de mort.

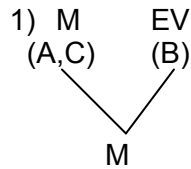
Par contre, si les juges connaissaient ou auraient une idée des préférences de leurs collègues, il y a possibilité de vote stratégique.

Le juge B déteste la peine de mort. Il pourrait à la première étape voter non coupable au lieu de voter coupable. Dans ce cas, le résultat final serait la libération de l'inculpé, ce qui satisferait le juge B qui préfère qu'un coupable soit libéré plutôt que de prononcer la peine de mort qu'il déteste, par principe.

La première approche aboutit donc à la peine de mort (M) s'il n'y a pas de vote stratégique et à la libération (NC) s'il y a vote stratégique.

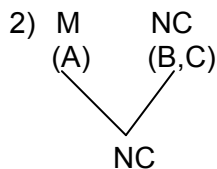
- b) Regardons la deuxième procédure où, dans une première étape, on décide de la peine appropriée face au type de crime présumé, pour décider dans une deuxième étape s'il faut appliquer cette peine ou déclarer non coupable l'inculpé.

Dans ce cas, en supposant qu'il n'y a pas de vote stratégique, on obtient :



Donc la décision majoritaire des juges est la peine de mort (M).

La deuxième étape consiste dans la décision s'il faut appliquer ou non une telle peine de mort.



Force est de constater que l'inculpé finira par être déclaré non coupable.

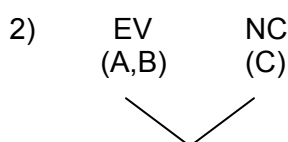
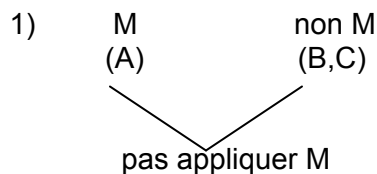
Mais de nouveau, il y a possibilité de vote stratégique.

Dans ce cas, le juge A anticipant le résultat NC, peut contre ses convictions voter à la première étape pour EV au lieu de M. La première étape dégage alors la peine EV.

Dans la deuxième étape où il y a lieu de décider entre d'un côté coupable et EV et de l'autre côté non coupable, c'est la décision « *coupable et EV* » qui l'emporte par 2 voix (B et A) contre 1 voix dissidente (C). Le juge A préfère une peine EV à la libération qui lui convient le moins.

Donc dans la deuxième approche, s'il n'y a pas de vote stratégique c'est NC et s'il y a vote stratégique, c'est EV.

- c) Dans la troisième procédure, on regarde d'abord si la peine de mort doit s'appliquer ou non. Si le vote est négatif, c'est-à-dire si la peine de mort n'est pas décidée, il faut décider si EV va s'appliquer. De deux choses l'une alors, la peine EV est appliquée ou l'inculpé est libéré.



EV

Donc c'est EV qui l'emporte.

Or, le juge C n'apprécierait pas du tout ce résultat. Il pourrait au premier vote quant au fait de savoir s'il faut appliquer ou non la peine de mort, voter pour la peine de mort. Cette dernière l'emporterait alors avec deux voix (celle de A et la sienne). Il n'y aurait alors plus d'étape supplémentaire puisqu'on aurait décidé la peine de mort pour l'inculpé.

Donc, avec la troisième procédure, sans vote stratégique, on a EV tandis qu'avec un vote stratégique, on a M.

Résumons ces résultats :

Procédure 1		Procédure 2		Procédure 3	
non stratégique	stratégique	non stratégique	stratégique	non stratégique	stratégique
M	NC	NC	EV	EV	M

Donc chacun des trois résultats M, EV et NC est a priori possible et lequel va se concrétiser dépend à la fois:

- du choix de la procédure,
- et
- de l'existence ou non de votes stratégiques (sophistiqués).

4.7.4. Exemple 12 du point 4.4.12.

On a vu à la section 4.4.12. dans l'exemple 12 que le projet y gagne avec la méthode de Borda.

Or, le premier votant préfère x à y. S'il vote non pas sur la base de ces préférences x y z t e mais sur la base de la suite x e z y t, alors le résultat initial se modifie comme suit :

x	y	z	t	e
12	13	7	12	6
	-2		-1	+3
↓	↓	↓	↓	↓
12	11	7	11	9

Après ce vote stratégique du premier individu, x, le projet, qu'il préfère le plus, l'emporte et non plus le projet y.

4.7.5. Quatre autres exemples de votes stratégiques

4.7.5.1.

Soit le profil des préférences suivant :

x	y	z
x	y	z
x	y	z
z	y	x
z	y	x
y	z	x
y	z	x

Si chacun vote selon ses préférences, c'est le projet x qui l'emporte à la majorité simple, x obtenant 3 votes, y obtenant 2 votes et z obtenant 2 votes.

Or, le fait que x l'emporte ne plaît nullement à 4 votants qui classent x au dernier rang de leurs préférences respectives.

Si, *ceteris paribus*, ceux qui ont les préférences y z x ne votent pas pour y mais pour z, c'est le projet z qui obtient la majorité simple, un projet qui n'est certes pas leur projet préféré, mais qui pour eux est préférable au projet x.¹

4.7.5.2.

Soit le profil des préférences suivant :

Groupe I	3	x	y	t	z
Groupe II	4	y	t	z	x
Groupe III	2	z	x	t	y

¹ Dans des termes plus positifs, on appelle cela (du point de vue des électeurs) un « *vote utile* » ou « *ne pas gaspiller son vote* ».

A la majorité simple, le projet y l'emporte. Cela n'arrange nullement les votants du groupe III. Si ceux-ci ne votent pas en fonction de leurs préférences, c'est-à-dire sont prêts à « sacrifier » z au niveau de leur vote pour éviter y, alors ils votent pour le projet x avec pour conséquence que le projet x l'emportera.

4.7.5.3.

Développons encore un exemple sur l'agenda setting.

Soit le profil des préférences suivant pour 3 votants confrontés à 8 projets :

N	M	T	S	R	Q	P	O
M	T	S	R	Q	P	O	N
T	S	R	Q	P	O	N	M

Regardons d'abord le projet O. Aucun des votants n'apprécie vraiment le projet O. Le premier votant le classe en dernier de ses préférences, le deuxième en avant-dernière place et le troisième à la sixième ou avant avant dernière place.

Ce projet O, quelle que soit une méthode de vote raisonnable, ne devrait avoir de chances – et ceci à juste titre – de l'emporter.

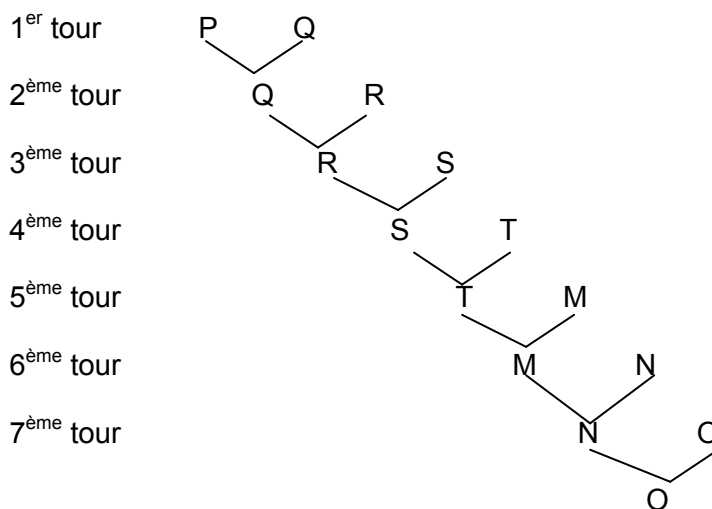
Supposons que le vote se fasse par une succession de votes deux à deux où dans un premier tour on oppose deux projets, dans un deuxième tour le gagnant à un des projets restants et ainsi de suite.

Supposons que vous êtes le Président du groupe qui doit décider, sans droit de vote avec comme seule prérogative de fixer l'ordre des votes, l'agenda. Vous avez, contrairement aux trois votants, une préférence prononcée pour le projet O. Comment pouvez-vous fixer l'agenda pour que votre projet va l'emporter ?

Pour répondre à cette question, il faut commencer à raisonner à partir du dernier tour de vote, en l'occurrence le septième. Vous voulez que O soit gagnant. Pour que tel soit le cas, il faut qu'au dernier des votes successifs O soit présent et soit confronté à un projet par rapport auquel O gagne. Pour assurer que O sera présent, il suffit de prévoir qu'O entre en lice au dernier vote.

Pour assurer que O gagne lors de ce dernier vote, il faut assurer que sera présent le projet N. En effet face à N, O obtient une majorité. Mais pour que N soit présent au dernier tour, il faut que N à l'avant-dernier tour l'emporte. Pour que tel soit le cas, il faut que N soit confronté à un projet contre lequel il gagne, par exemple M et ainsi de suite.

Complétons ce graphique à travers la procédure suivante.



Donc pour que O gagne, vous devez commencer par opposer P à Q, puis le gagnant Q à R et ainsi de suite comme illustré dans le graphique. En procédant de la sorte, vous pouvez, en tant que Président, sans droit de vote, manipuler le résultat.

4.7.5.4. QUATRIEME EXEMPLE

Soit le profil des préférences pour trois votants I, II et III et quatre projets A, B, C et D.

I	A	B	C	D
II	B	A	D	C
III	A	B	D	C

Admettons que le vote se fasse selon la méthode de Borda. On obtient alors :

	A	B	C	D
	3	2	1	0
	2	3	0	1
	3	2	0	1
	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>

8	7	1	2
---	---	---	---

C'est le projet A qui l'emporte.

Cela ne plaira pas au votant II qui ne range le projet A qu'à la deuxième place de ses préférences individuelles.

Admettons qu'il va voter de façon stratégique en ce sens qu'il va voter selon l'ordre B C D A.

Dans ce cas, on a :

A	B	C	D
3	2	1	0
0	3	2	1
4	3	1	2
7	8	4	3

C'est alors le projet B qui l'emporte, ce qui est précisément le projet que le votant II valorise le plus.

On a donc que les préférences que le votant II a eu intérêt à 'divulguer' (BCDA) ne correspondant pas à ses préférences effectives (BADC).

Dans la mesure où il voterait 'sincèrement', le résultat final pour lui serait moins bien que s'il votait stratégiquement.

Admettons maintenant que l'on n'appliquerait pas la méthode de Borda, mais la méthode de Borda inversée¹ selon laquelle on écarterait d'abord le projet qui obtiendrait le moins de voix, pour refaire ensuite un vote de Borda avec les projets restants, avec de nouveau l'écartement du projet le moins bien placé dans ce deuxième tour et ainsi de suite.

Dans ce cas, si le votant II votait toujours de façon stratégique comme ci-dessus, que se passerait-il ?

4.7.5.5. DERNIER EXEMPLE

Soit le profil des préférences à 3 votants A, B et C et à 4 projets a, b, c et d :

A	a	b	c	d
B	a	b	d	c
C	b	d	c	a

Si le vote se fait à la méthode de Borda, on a :

¹ C'est une autre variante de la méthode de Nanson.

a	b	c	d
3	2	0	1
3	2	0	1
0	3	1	2
6	7	2	3

C'est le projet b qui est le Borda winner. Cela n'arrange pas les deux votants A et B qui placent a en première place.

Il suffirait qu'un seul, ou les deux, placent b en dernier rang de leurs préférences respectives pour que le projet a l'emporte.

Ces deux votants A et B pourraient, par ailleurs, se concerter. Au minimum, si p.ex. B changerait son ordre a b d c en a d c b, alors le projet a l'emporterait à la méthode de Borda, peu importe ce que fera le votant C.

Le projet a aurait dans pareil cas au moins 6 voix et tout autre projet aurait au plus 5 voix, ce qui ferait du projet a, à coup sûr, le Borda winner.

A et B formeraient, en l'occurrence, une coalition qui ne serait dominée par aucune autre coalition. On pourrait également dire que A et B forment une coalition décisive.

4.7.6. Un résultat général en matière de votes stratégiques. Le théorème de Gibbard-Satterthwaite

On peut s'interroger si l'on peut trouver une méthode de vote qui a la propriété que pour tout profil des préférences a priori concevable, cette méthode de vote échappe toujours au risque qu'il peut y avoir des votes stratégiques.¹

La réponse à cette question est non comme il ressort d'un théorème prouvé indépendamment par Gibbard et par Satterthwaite et appelé de ce fait le théorème de Gibbard-Satterthwaite.

¹ Formulé plus techniquement, l'interrogation consiste à savoir s'il existe un mécanisme de vote qui remplit la condition de la « *strategy proofness* » qui se définit comme suit : Soit θ_i la déclaration de préférences du votant i s'il revête ses véritables préférences. Soit $\bar{\theta}_i$ la déclaration de préférences de i s'il ne déclare pas ses véritables préférences θ_i . Soit x le projet qui est collectivement choisi si i déclare la vérité, θ_i , et si également tous les autres votants disent la vérité. Soit y un projet qui est choisi si tous les autres disent la vérité mais où i déclare $\bar{\theta}_i$. On dit que le mécanisme de vote est « *strategy proof* » si pour tous les $\bar{\theta}_i$ concevables, il n'existe pas de projet y qui serait préféré au projet x.

Ce théorème dit, en substance, que si plus de deux projets sont soumis au choix, il n'existe aucune méthode de vote qui est à l'abri de la possibilité que les préférences individuelles soient telles qu'il existe au moins un votant qui est incité à voter de façon stratégique.¹

Donc pour chaque méthode de vote, on trouve toujours au moins un profil des préférences qui est tel qu'il renferme une incitation pour au moins un votant de voter de façon stratégique, c'est-à-dire de ne pas voter selon ses véritables préférences.

Notons bien que ce théorème ne dit nullement que pour chaque méthode de vote, il y a toujours vote stratégique ni qu'en appliquant une méthode de vote donnée à un profil des préférences donné qu'il y ait forcément vote stratégique. Il dit que pour chaque méthode de vote, on peut toujours trouver un profil de préférences qui ouvre la possibilité de votes stratégiques. Par ailleurs, il ne comporte pas de jugement normatif si l'existence (éventuelle) d'un vote stratégique est une bonne ou une mauvaise chose.

Le théorème de Gibbard-Satterthwaite² est un corollaire d'un théorème encore plus important, dont on parlera plus tard, le théorème d'impossibilité d'Arrow.

En fait, le vote est exposé à des choix stratégiques à un double niveau :

¹ Le théorème dit : « S'il existe un mécanisme de vote qui n'est pas manipulable par des votes stratégiques, c'est-à-dire s'il existe un mécanisme de vote dans lequel les votants ont toujours, peu importe leurs préférences individuelles, intérêt à voter sincèrement, et si plus de deux projets sont soumis au vote, alors ce mécanisme de vote ne peut être autre que dictatorial. »

Autrement dit, il n'existe pas de mécanisme de vote qui en toutes circonstances serait à l'abri de votes stratégiques aurait la caractéristique de la strategy proofness et qui en même temps serait non-dictatorial. Un mécanisme dictatorial est un mécanisme qui « choisit » un individu particulier et « fait » des préférences de cet individu la préférences collective.

Feldman et Serrano, *Welfare Economics and Social Choice*, notent à propos de ce théorème que "a theorem of Allan Gibbard and Mark Satterthwaite says that if individuals report their preferences to a central authority, and based on those preferences, the central authority chooses the best alternative for society, then the individuals in society will normally be tempted to lie, so as to manipulate the outcome... On the other hand, a theorem of Eric Maskin shows that under certain conditions, it is possible for a central authority to devise a mechanism, "played" by the individuals, which has the property that if everybody but person *i* is telling the truth about his preferences, person *i* will want to tell the truth also. That is, truth telling is an equilibrium of the "game", the game has no other equilibrium outcome, and is so designed that it yields the best outcome for society."

Szpiro souligne bien la différence de vocabulaire entre Gibbard et Satterthwaite: "One of the differences is that Gibbard described the misrepresentation of one's preferences as a manipulation while Satterthwaite called it a strategy... The two professors whose names the theorem carries did not put any labels on the electors' activities. Nevertheless, Gibbard's use of the word "manipulation" has a negative connotation while their portrayal as "strategy" by Satterthwaite glosses over some of their disconcerting aspects. As so often, it all depends on the context." (*Numbers rule*, Princeton University Press, 2010, p. 180).

² Il ne faut pas confondre le théorème de Gibbard-Satterthwaite avec ce qu'on appelle dans la littérature le paradoxe de Gibbard (cf. précédemment la section 4.5.7).

- le choix de la méthode de vote, puisque différentes méthodes peuvent, sans que cela ne soit forcément le cas, donner différents résultats, ce qui explique que les discussions sur l'adoption d'une méthode de vote sont souvent controversées ;
- le choix au niveau de l'expression des votes dans le cadre d'une méthode de vote donnée.

Si ceux qui décident la méthode de vote sont également ceux qui votent, il y a interaction de ces deux problématiques et on entre en plein dans ce que l'on peut appeler la théorie des jeux du vote.

Nous allons terminer la sous-section 4.7 par une exception du concept de l'indice de Shapley-Shubik.

4.7.7. Coalitions et indice de Shapley-Shubik

Soit une société anonyme où la répartition des actionnaires est la suivante :

	pourcentage de détention
héritiers du fondateur (E)	43%
investisseurs financiers (F)	43%
petits actionnaires (K)	14%

Admettons que les décisions soient à prendre à l'Assemblée générale à la majorité qualifiée qui est de 75% des voix.

Le tableau ci-après indique chaque combinaison possible d'acteurs et pour chacune de celle-ci l'on regarde lequel des acteurs est central (« *pivotal* ») au sens que c'est lui qui va être décisif pour assurer une majorité qualifiée à la combinaison en question.

Dans ce cas, on lui attribuera la valeur 1, sinon la valeur 0.

	Acteur central		
	E	F	K
EFK	0	1	0
EKF	0	1	0
FEK	1	0	0
FKE	1	0	0
KEF	0	1	0
KFE	1	0	0
Somme	3	3	0
Indice de Shapley-Shubik	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{0}{6} = 0$

Pour chacune de ces combinaisons a priori possible, il n'existe qu'un seul acteur central.

En additionnant pour chaque acteur le nombre de fois qu'il est central, et en divisant ce nombre par le nombre total des combinaisons possibles, a priori, en l'occurrence 6, on obtient une grandeur relative qu'on appelle l'indice de Shapley-Shubik et qui est sensé indiquer le pouvoir de chaque acteur.

On constate que les héritiers (E) et les investisseurs financiers (F) sont également puissants tandis que les petits actionnaires n'ont aucun pouvoir en ce sens que dans aucun des scénarios concevables ils n'arrivent à exercer une influence sur les décisions de l'Assemblée générale.

Ils ne peuvent ni former une majorité qualifiée avec les héritiers, ni une majorité qualifiée avec les investisseurs financiers.

D'un point de vue pouvoir, qu'ils aient 14% ou moins des voix, cela revient au même.¹

Supposons maintenant que les décisions soient prises à la majorité simple.

Dans ce cas, on voit que les petits actionnaires acquièrent un pouvoir égal, avec notamment 14%, à celui des deux autres groupes ayant chacun 43% dans la mesure où les petits actionnaires peuvent former une coalition avec chacun des deux autres groupes pris individuellement ($43\% + 14\% > 50\%$).

Finalement, supposons qu'il y ait une augmentation du capital souscrite exclusivement par un nouvel actionnaire, l'actionnaire stratégique, de sorte à ce que l'on ait la répartition suivante des actions :

	nombre d'actions
héritiers	43
investisseurs financiers	43
petits actionnaires	14
investisseurs stratégiques	20
	120 actions

La majorité qualifiée est maintenant de 90 voix ($75\% \cdot 120$).

Regardons ce qui se passe pour les décisions à prendre à la majorité qualifiée pour lesquelles, avant l'augmentation de capital, les petits actionnaires ont été, comme on l'a vu, totalement irrelevants.

Suite à l'augmentation de capital, le pouvoir relatif des héritiers et des investisseurs financiers a diminué, ce qui est la conséquence de la dilution de l'augmentation de capital.

Toutefois, si avant les petits actionnaires avaient un pouvoir nul, ils ont maintenant – et sans avoir augmenté leur participation au capital – un certain pouvoir dans la mesure où ils peuvent être centraux pour une coalition avec les héritiers et les investisseurs financiers ($43+43+14>90$).

Leur indice de Shapley-Shubik n'est plus égal à zéro.¹

¹ Un grand financier, ou un financier qui s'est fait ou se dit grand, a noté : « *Petits minoritaires, petits cons. Grand minoritaires, grands cons.* »

Nous constatons que le nombre d'actions et le pourcentage détenu des actions ne sont pas forcément un bon indicateur per se quant à l'influence d'un acteur et quant à son pouvoir. Ce dernier consiste dans son influence sur les décisions que l'on peut définir et mesurer par exemple par l'indice de Shapley-Shubik.

Ce dernier exemple illustre également ce que l'on appelle « *le paradoxe de nouveaux membres* ».

En l'occurrence, un ancien membre, les petits actionnaires, a vu augmenter son pouvoir dans la société – défini selon l'indice de Shapley-Shubik – suite à l'accroissement du nombre d'actionnaires dans la société de capitaux.²

4.8. Single peaked preferences, le théorème de l'électeur médian de Duncan Black et le modèle spatial³

Il est une chose que de poser en théorie une condition d'universalité ou de domaine non restreint, exprimant que chaque ordre de préférence doit être concevable par rapport à un champ de choix donné, en pratique il se peut et il arrive que certaines préférences restent théoriques car peu plausibles.

Dans cet ordre d'idées, il y a notamment lieu de mentionner la théorie de Black qui, précisément, cherche à analyser ce qui se passe en cas d'un vote à la majorité (pluralité) si le champ des préférences est a priori raisonnablement restreint.

Nous allons exposer le concept de « *single peaked preferences* » et expliquer le théorème de l'électeur médian pour terminer par une introduction très succincte dans les modèles dits spatiaux où les projets sont tridimensionnels.

4.8.1. Des préférences « single peaked »

A part quelques exemples spécifiques, notre analyse a été développée à un niveau on ne peut plus abstrait quant à la nature des projets soumis au choix.

Si on n'a parlé que de projets sans préciser la nature et le contenu de ceux-ci, cela s'explique par l'objectif qui a été de dégager une compréhension globale de l'impact conjugué de la structure des profils de préférence et des mécanismes du vote sur l'ordre collectif, en général, et sur l'existence et les caractéristiques du projet se classant premier dans l'ordre collectif, en particulier.

¹ Voilà pour la citation de la note de bas de page précédente.

² Cet exemple s'inspire très fortement de Gernot Sieg, *Spieltheorie*, Oldenbourg, 2005.

³ Cette section 4.8, notamment la sous-section 4.8.3, est dans sa toute première version.

Toutefois, dans la pratique, on ne soumet pas au choix des projets abstraits, mais des projets qui ont une nature et un contenu réels.

Cela implique qu'il y a lieu de compléter l'analyse théorique abstraite par une analyse plus ciblée prenant en compte la nature même des projets parmi lesquels il y a lieu de choisir.

Pour clarifier ces propos, développons un exemple.

La modernisation d'un théâtre est décidée. Il reste toutefois à arrêter le montant à investir.

Trois montants d'investissement sont en discussion, à savoir un investissement de 20 (désigné par projet x), un investissement de 30 (projet y) et un investissement de 40 (projet z).

Trois votants doivent décider à la majorité simple lequel de ces trois projets retenir.

Notons que la différence entre ces projets n'est pas de nature puisqu'il y va toujours de l'investissement de modernisation d'un théâtre, mais que la distinction est de degré dans la mesure où les projets ne se distinguent que quant à l'enveloppe financière et que, de surcroît, la dimension en question est en principe quantifiable.^{1 2}

Un votant quelconque pourrait, à priori, avoir l'un des ordres de préférences individuels ci-après qui constituent une liste exhaustive des ordres possibles :

(i)	x	y	z
(ii)	x	z	y
(iii)	y	x	z
(iv)	y	z	x
(v)	z	x	y
(vi)	z	y	x

Ces ordres sont tous les ordres logiquement et a priori possibles dans lesquels il est possible pour un votant de classer trois projets x, y et z.

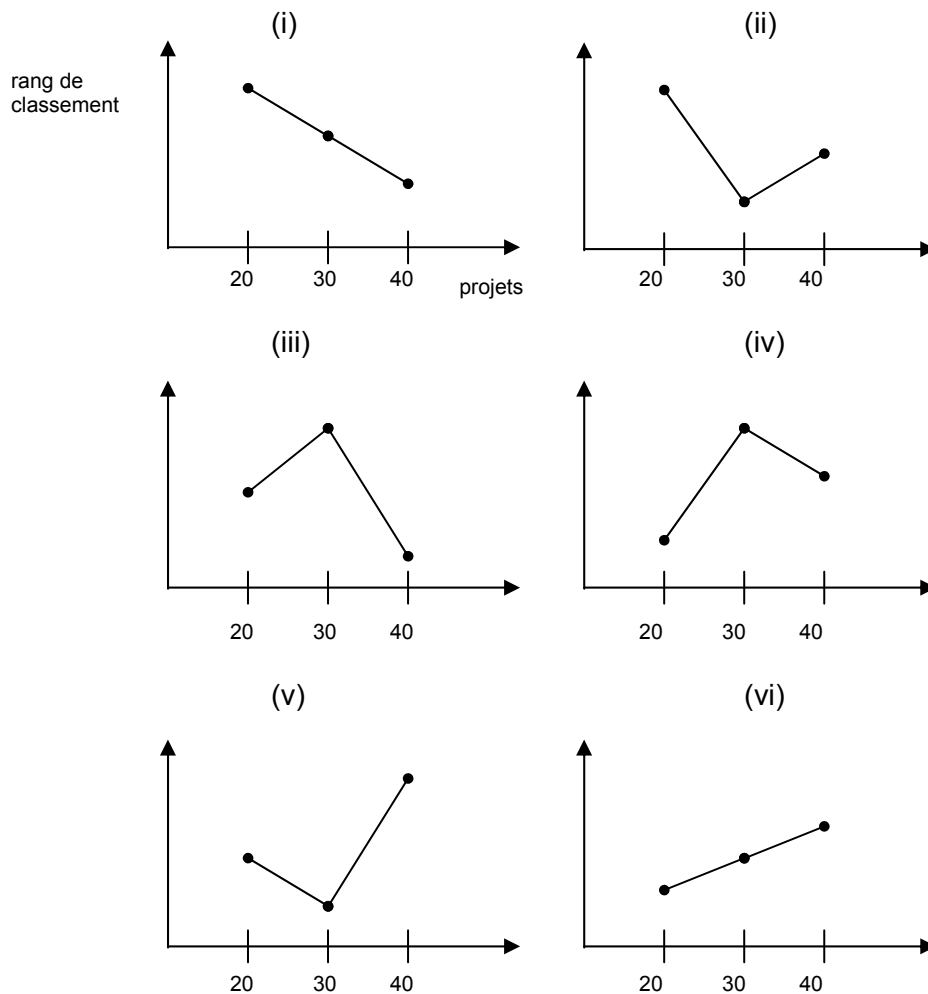
On peut représenter graphiquement chacun de ces ordres (i) à (vi) en indiquant le long d'un axe horizontal les projets classés par ordre croissant du montant d'investissement et le long d'un axe vertical le classement de ces projets dans l'ordre en question.

¹ Quid si la décision revenait à décider auquel de trois objets différents consacrer l'investissement d'un montant donné ?

² Nous n'allons pas entrer dans les derniers détails techniques. A ce stade déjà, l'on pourrait distinguer selon que le long de l'axe des x représentatif de la dimension x, les projets sont tout simplement rangés ordinalement ou selon qu'ils sont rangés d'après le principe de la distance euclidienne, ce qui serait ici théoriquement parfaitement possible en relation avec une dimension qui se décline en unités monétaires.

Notons que les raisonnements qui suivent ne requièrent pas une représentation en termes de distance. On l'introduira explicitement à la fin de la sous-section. Ceci dit, heuristiquement rien ne vous interdit de vous situer déjà dans cette approche à ce stade.

On obtient pour les six ordres¹ :



Interrogeons-nous s'il est pour chaque ordre également plausible que l'on le retrouve effectivement en tant qu'ordre des préférences d'un votant quelconque.

L'ordre (i) se caractérise par le fait qu'un individu qui l'aurait fait sien préférerait que la dépense d'investissement soit la moins élevée possible. Partant, il préfère x à y et z et il préfère y à z.

L'ordre (ii) serait celui d'un individu qui préférerait en premier lieu que l'on effectue l'investissement le moins élevé mais à défaut, aurait une préférence pour l'investissement le plus élevé par rapport à l'investissement intermédiaire qui lui conviendrait donc le moins. Si on ne

¹ Les distances entre les projets importent pour leur classement ordinal.

peut exclure qu'un votant ait de telles préférences, l'on peut toutefois émettre la conjecture qu'en pratique un tel ordre semble moins plausible.

L'ordre (iii) serait celui d'un individu qui préférerait avant tout l'investissement moyen (projet y), mais à défaut pencherait plutôt du côté « *économies budgétaires* » (projet x) que du côté « *dépenses élevées* » (projet z). De telles préférences sont parfaitement plausibles, tout comme l'ordre (iv), où de nouveau l'investissement moyen est préféré, mais où à défaut de celui-ci, l'individu pencherait pour les « *dépenses élevées* » par rapport à l'« *économie budgétaire* ».

Avec l'ordre (v), on aurait une situation similaire à celle de l'ordre (ii). Ici, un individu qui se caractérisait par cet ordre, préférerait l'investissement élevé (projet z), mais ne rangerait pas en deuxième rang l'investissement immédiatement inférieur (projet y), donc le plus rapproché du projet z, mais, en revanche, rangerait ce dernier en dernier rang et l'investissement réduit (projet x) en deuxième place. Cet ordre, tout comme l'ordre (ii), semble a priori moins plausible.

L'ordre (vi) de nouveau est un ordre plausible. Celui qui l'en ferait le sien serait quelqu'un qui préférerait un projet d'autant plus que l'investissement est élevé.

Nous pouvons donc conclure que parmi les six ordres, deux sont moins plausibles que les autres, à savoir (ii) et (v).¹

Tout se passe donc comme si un votant était « parfaitement libre » de décider parmi tous les projets celui qu'il préfère le plus, tandis que sa deuxième préférence ne peut être qu'un des deux projets voisins – le voisin de gauche ou le voisin de droite – du projet le plus préféré et ainsi de suite.

Avant de continuer le raisonnement, regardons de plus près les deux ordres (ii) et (v), donc $x z y$ et $z x y$, et notamment leurs représentations graphiques respectives supra.

Ces deux ordres se distinguent des quatre autres par une caractéristique structurelle bien précise.

Nous constatons en effet que tous les ordres se caractérisent par l'existence d'un sommet unique (« *single-peakness* »), sauf précisément les ordres (ii) et (v).²

¹ Notons bien qu'il ne faut pas confondre plausibilité et impossibilité logique. Il n'y a rien de logiquement impossible dans p.ex. l'ordre (ii). Ce que nous disons est qu'il est possible per se mais peu plausible. Il est per se possible puisque l'on peut bien avoir quelqu'un qui préfère l'investissement le moins élevé, mais pensant qu'un investissement moyen ne servirait à rien, préférerait le montant élevé au montant moyen tout en préférant le montant faible aux deux autres.

² Le projet y, c'est-à-dire le projet 30 se positionne entre les projets 20 et 40, n'occupe jamais le dernier rang dans ces ordres. Si y occupait le dernier rang, on aurait forcément que x à gauche et z à droite sont plus préférés que y et y ne serait pas un sommet mais une vallée avec deux sommets voisins, l'un à gauche, l'autre à droite. Voilà une autre façon encore d'exprimer qu'il y a un sommet unique (« *eingipfelige Präferenz* »), à savoir qu'il existe un projet qui n'occupe chez aucun des individus le dernier rang. Une autre façon d'exprimer cette caractéristique est de dire que les préférences individuelles sont telles qu'un projet est d'autant moins préféré par le votant qu'il se situe plus loin de son projet le plus préféré.

Autrement dit, pour chacun des deux ordres il n'est pas le cas que plus un projet est éloigné le long de la ligne unidimensionnelle du projet le plus préféré, moins ce projet est préféré.

Prenons l'ordre (ii). Le projet le plus préféré est 20, or 40 est plus loin de 20 que 30, mais est préféré à 30.

Prenons l'ordre (v). 40 est le plus préféré, mais 20 qui est plus loin de 40 que 30 est cependant plus préféré à 40 que 30.

Une autre façon d'exprimer la même caractéristique est qu'il existe un projet, le projet y , qui, pour aucun des individus, n'est jamais le moins préféré.

Donc, on a deux façons équivalentes d'exprimer la caractéristique single-peaked.

On reviendra par après au lien de cette observation de « *l'absence de la propriété d'un sommet (maximum) unique* » pour les ordres (ii) et (v) avec le constat de la « *moindre plausibilité* ».

En résumé, s'il existe a priori trois catégorisations, à savoir :

- ceux qui préfèrent l'investissement faible x ;
- ceux qui préfèrent l'investissement moyen y ;
- ceux qui préfèrent l'investissement élevé z ,

s'il est plausible pour ceux appartenant à la deuxième catégorie, qu'ils placent en deuxième place soit x soit z , il n'est pas très plausible que dans la première catégorie on place z en deuxième préférence et que dans la troisième catégorie, on place x en deuxième préférence.

Si maintenant nous éliminons les deux ordres peu plausibles, alors l'ordre que vont revêtir les préférences individuelles d'un quelconque votant est un des quatre ordres restants :

- (i) x y z
- (iii) y x z
- (iv) y z x
- (vi) z y x

Or, on peut montrer que peu importe l'ordre de préférence individuel que chaque votant va choisir parmi ces quatre ordres restants, le profil des préférences qui se dégage pour l'ensemble des trois votants sera en tout cas tel qu'il ne se dégage pas au niveau de l'ordre collectif une cyclicité, que partant, il existe toujours un Condorcet winner.

Autrement dit, pour que la cyclicité soit possible, il faudrait comme condition nécessaire et suffisante que l'on retrouve respectivement l'ordre individuel (ii) ou l'ordre individuel (v) dans le profil des préférences.

Illustrons cette affirmation.

Nous avons vu au début de la section 4 (section 4.4.1) que le profil ci-après pour les préférences de trois individus A, B et C par rapport à trois projets x, y et z :

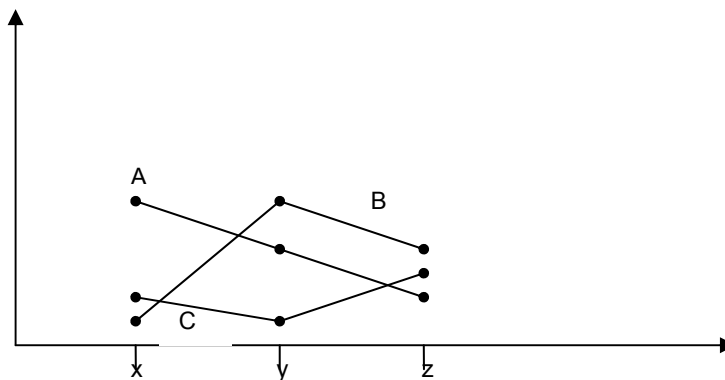
A	x	y	z
B	y	z	x
C	z	x	y

se caractérise par la cyclicité.

Admettons que ces projets puissent être positionnés le long d'une échelle unidimensionnelle, p.ex. un montant monétaire, une échelle politique gauche/droite.

Or, ce profil n'est pas plausible dans notre exemple puisque l'on y retrouve un ordre individuel, à savoir z x y qui, compte tenu des réflexions qui précèdent, peut être considéré comme étant peu plausible.

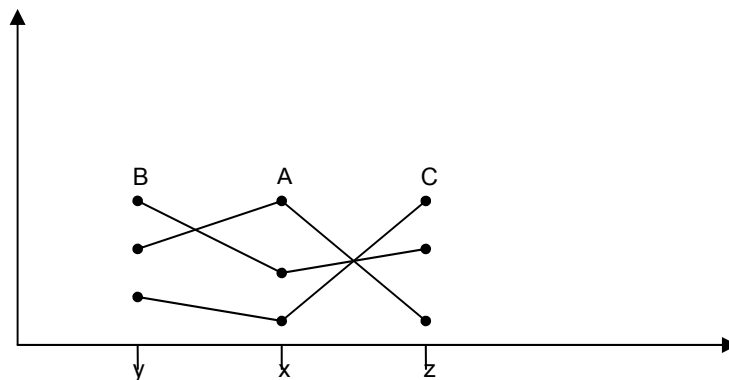
Ceci dit, pour les besoins du raisonnement, représentons sur un même graphique les trois ordres individuels :



Nous voyons que C a deux sommets tandis que A et B n'en ont qu'un. En serait-il différent si l'on avait changé la succession des projets le long de l'axe des x ? Non. Il y aurait toujours un ordre qui se caractériserait par un double sommet.¹

¹ Notons cependant que la propriété single peaked ne requiert pas que la caractéristique uni-modal soit remplie peu importe l'ordonnement des projets le long de la ligne unidimensionnelle. (cf. Sen, *Collective Choice and Social Welfare*, p. 167).

A titre d'exemple, prenons l'ordre y x z :



C'est l'ordre B qui, dans cette présentation, a deux sommets.

Ce qui importe pour le résultat c'est que peu importe la succession des projets le long de l'axe des abscisses, l'on a toujours un ordre individuel, même si pas le même, qui se caractérise par deux sommets.

Autrement dit, pour que les préférences soient single-peaked, il faut pouvoir trouver un ordonnancement le long de l'axe horizontal des projets de sorte à ce que tous les ordres individuels soient single peaked.

Récapitulons notre démarche. Nous avons montré que pour certains types de choix, - l'exemple de la décision quant au montant d'un investissement public en est un - certaines préférences individuelles sont moins plausibles.

Celles qui ont apparu comme étant moins plausibles se sont révélées être celles dont l'absence est précisément une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait absence de cyclicité au niveau collectif, donc pour qu'il y ait présence d'un Condorcet winner.

Plus techniquement, ces préférences peu plausibles ont une propriété commune qui est celle qu'elles ne sont pas à sommet (maximum) unique, ce que l'on exprime également en disant qu'elles ne sont pas uni-modales.

Cette condition, dans le cas de notre exemple à 3 projets (et 3 individus) peut encore s'exprimer en disant qu'il existe un projet, en l'occurrence, le projet y, qui n'occupe jamais le dernier rang.¹

¹ De façon plus générale, on peut montrer qu'il n'existe pas de cycle s'il existe un projet qui n'occupe pour aucun individu un rang donné dans les ordres de préférence respectifs. Autrement dit, on a l'acyclité non seulement si aucun objet n'occupe le dernier rang, mais également si on a un projet qui

4.8.2. Le théorème de l'électeur médian

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème du votant (de l'électeur) médian, appelé également d'après son auteur, l'économiste Duncan Black, le théorème de Black que l'on peut décliner comme suit :

« Dans les cas où les préférences individuelles sont toutes unimodales :

- *le vote à la majorité produit des préférences collectives aussi cohérentes que les préférences individuelles ou plus techniquement, il existe un Condorcet winner ;*
- *et ce Condorcet winner est le projet médian. »*

La deuxième partie de ce théorème, qui a trait au projet médian, et, par extension, à l'électeur médian, appelle encore une explication. Que faut-il entendre par ces deux concepts ?

Chaque votant a des préférences single peaked par rapport aux projets entre lesquels il y a lieu de choisir.

Il a partant un projet qu'il préfère le plus, son projet¹ idéal qui domine les autres.

Si nous avons n votants, il existe pour chacun de ceux-ci un projet idéal, soit il y a n projets idéaux en tout, sans que ces projets idéaux doivent être chaque fois différents pour les différents votants.

Le projet idéal médian est celui de ces projets idéaux qui se caractérise par le fait que le nombre de projets idéaux situés à sa gauche, le long de l'échelle unidimensionnelle de classement, est égal au nombre de projets situés à sa droite.

Autrement dit, s'il y a n projets (où n est impair²), alors le projet médian est celui qui a $n-1$ projets à sa gauche et $n-1$ projets à sa droite.

L'électeur médian est l'électeur qui, précisément, a pour projet idéal le projet idéal médian.

n'occupe jamais, c.-à-d. chez aucun des individus, le milieu ou encore si on a un projet qui n'occupe jamais le premier rang.

¹ dans la littérature, l'on parle aussi du « *bliss point* ».

² On peut généraliser si n est pair et s'il y a plusieurs votants qui ont comme projet idéal le projet médian.

Développons un exemple. Soient 5 électeurs qui doivent décider par rapport aux projets x, y et z précédents d'un montant à investir ($x < y < z$) dont le profil des préférences est :

A	z	y	x
B	y	z	x
C	x	y	z
D	z	y	x
E	x	y	z

Force est de constater que les projets idéaux des différents votants sont respectivement :

A :	z
B :	y
C :	x
D :	z
E :	x

Le projet médian est le projet y. Deux des cinq projets idéaux, à savoir deux fois le projet x, se retrouvent à sa gauche, et deux des cinq projets, à savoir deux fois le projet z, se trouvent à sa droite.

L'électeur médian est le votant B.

Le projet médian le remporte contre n'importe lequel des autres projets, d'où l'importance de l'électeur, l'électeur médian, qui véhicule ce projet médian.

Un corollaire de ce théorème est que si deux projets quelconques sont confrontés, le projet qui l'emporte est celui qui est le plus près (le moins distant) du projet médian. Ce corollaire n'est vrai que si on a introduit la distance.

Notons encore que la matrice du vote, en utilisant la définition du score de Copeland telle que donnée dans la section 4.4.10.2, est :

	x	y	z	Total	Copeland
x	/	2	2	4	-2
y	3	/	3	6	2
z	3	2	/	5	0

Cette matrice peut encore s'écrire comme suit si on associe les valeurs 1, 0 et -1 respectivement à une victoire, un ex aequo ou une défaite¹ :

	x	y	z	Total	Copeland
x	/	-1	-1	4	-2
y	1	/	1	6	2
z	1	-1	/	5	0

Finalement, l'on peut réorganiser la matrice comme suit :

¹ cf. section 4.4.1.10.2.

	x	y	z	Total	Copeland
y	/	1	1	4	2
z	-1	/	1	6	0
x	-1	-1	/	5	-2

Nous constatons que cette matrice est triangulaire. Cette propriété est caractéristique d'un profil des préférences qui satisfait à l'existence d'un Condorcet winner.

On aurait pu démarrer l'analyse par une approche parfaitement complémentaire en recourant au concept de winset (on parle aussi quelques fois du winset majoritaire) d'un projet¹. En désignant par $w(x)$, $w(y)$ et $w(z)$ les winset respectifs des trois projets, force est de constater que :

$$\begin{aligned} w(x) &= \{y, z\} \\ w(y) &= \emptyset \\ w(z) &= \{y\} \end{aligned}$$

Le projet dont le winset est vide est précisément le Condorcet winner et c'est, par ailleurs, également le seul élément du core qui se réduit ici à un singleton.

Pour terminer, notons que les réflexions ci-dessus qui relèvent de la théorie du choix collectif peuvent également constituer une entrée en la matière pour ce qui est de l'analyse politique, et plus particulièrement de l'analyse du comportement des partis politiques.²

Reprenons notre dernier exemple. Un parti politique qui s'engagerait à défendre le projet x saurait qu'avec un tel programme, il ne pourrait gagner des élections puisqu'une majorité de votants préférerait un autre projet et voterait pour un parti rival qui ferait sien la promotion du projet y.

En effet, non seulement le votant B voterait pour le parti rival, mais également les électeurs A et D.

Si l'objectif des deux partis était de gagner des élections, le deuxième parti ajusterait son programme de sorte à refléter la préférence de l'électeur médian et donc on assisterait – dans une optique unidimensionnelle du type gauche-droite – à un regroupement des deux partis au « *centre* », ce dernier étant défini précisément comme la préférence de l'électeur médian.^{3 4}

¹ cf. section 4.4.1.4.

² Le premier qui a utilisé les mécanismes du modèle de Hotelling pour les combiner avec la théorie de Black des préférences single-peaked a été Anthony Downs avec son livre *An Economic Theory of Democracy*.

³ cf. au chapitre 3 le développement du modèle de Hotelling et son application au processus politique.

⁴ Dans la littérature, on considère encore d'autres cas de limitation du champ des préférences, à savoir (a) du « *single crossing property* » (qui s'apparente à ce que l'on appelle le cadre de la théorie des informations asymétriques la condition de Spence-Mirrlees), (b) des « *value restricted preferences* » dont les « *single peaked preferences* » sont un sous-cas possible et (c) le cas des préférences intermédiaires dans le cadre de préférences multidimensionnelles.

Notons bien que ce n'est pas l'électeur médian qui décide ce qui va se faire mais ce qui va se faire va correspondre à ce que veut l'électeur qui va être l'électeur médian.

Il ne faut pas non plus que le nombre de votants qui se situent au centre soient très nombreux. En effet, comme l'exprime Shepsle : *"In the context of one-dimensional pure majority rule with single peaked preferences, for example, whether in two-party electoral competition or legislative policy choice, the magnetic attraction of the median participant's ideal point is powerful. Majoritarian politics is subjected to centripetal forces, producing outcomes that observers describe with words such as "compromise", "moderate" or "centrist". At the very least then, the simple spatial model provides a rational or an explanation for the inexorable movement of majority-rule competition toward the centre of participant preferences. It's surprise value lies in the fact that this centripetal dynamic is not because "that's where the votes are" ... Movement toward the median voter's ideal is an equilibrium tendency in a pure majority rule arrangement even if there are very few voters at the centre of things."*

Où regardons les choses quelque peu autrement. Supposons qu'il y ait trois partis politiques, disons gauche, centre et droite, c.-à-d. on suppose que les partis peuvent être classés linéairement dans une dimension qui en l'occurrence est « *idéologique* ».

On a vu qu'a priori, il y a six ordres individuels possibles pour un votant.

(1)	Gauche	Centre	Droite
(2)	Gauche	Droite	Centre
(3)	Droite	Gauche	Centre
(4)	Droite	Centre	Gauche
(5)	Centre	Droite	Gauche
(6)	Centre	Gauche	Droite

Lesquels de ces ordres, a priori, vous semblent peu probables ?

A priori, on dirait que (2) et (3) sont peu probables.

En écartant ces deux possibilités et en supposant qu'il y a quatre votants A, B, C et D et que chacun des votants a un ordre des préférences différent et correspondant à un des quatre ordres restants (1), (4), (5) et (6).

A	Gauche	Centre	Droite
B	Droite	Centre	Gauche
C	Centre	Droite	Gauche
D	Centre	Gauche	Droite

En opposant Centre à Droite, Centre l'emporte majoritairement (A, C et D). En opposant Droite à Gauche, on a un ex aequo, et en opposant Centre à Gauche, Centre l'emporte majoritairement (B, C et D).

Donc, on a Centre > Gauche ~ Droite.

En tout cas, c'est le Centre qui est le Condorcet winner. Si on n'a pas ici une transitivité, on a cependant une quasi-transitivité.

Nous pouvons maintenant étendre quelque peu le modèle en définissant les préférences comme des distances euclidiennes par rapport au projet idéal, c.-à-d. en introduisant le concept de distance euclidienne, ce qui rend le modèle spatial.

La distance se définit en désignant par y le projet idéal et par x_i tout autre projet :

$$|y - x_i|$$

Plus la distance est petite entre le projet idéal d'un votant y et un autre projet x quelconque, plus on est proche en termes de préférences du projet idéal de ce votant.

Soient deux projets x_1 et x_2 .

Si $|y - x_1| > |y - x_2|$, on dira que le projet x_2 est préféré par le votant au projet x_1 . Donc, l'ordre individuel des préférences individuelles est constitué par les distances des projets x_i au projet idéal ; plus x_i est près de y , plus x_i est préféré.

Si on a pour deux projets x_i et x_j , avec $x_i = x_j$, que :

$$|y - x_i| = |y - x_j|$$

alors ces deux projets sont situés l'un à gauche de y et l'autre à droite et le votant est indifférent entre les deux.

4.8.3. Le modèle spatial des votes bidimensionnel.

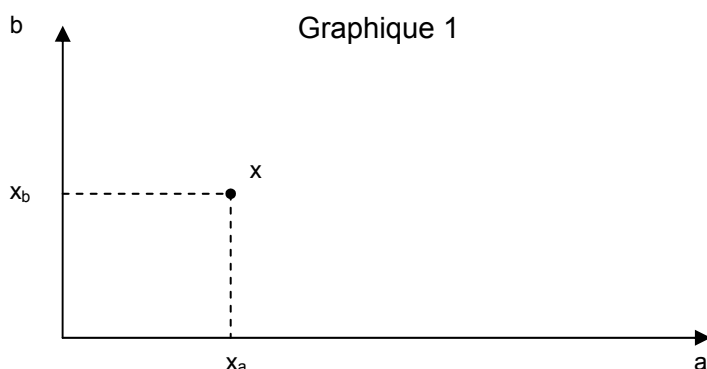
L'extension naturelle de ce type de modèle unidimensionnel est constituée par le passage en deux dimensions en ce sens que chaque projet se définit d'après deux caractéristiques et non pas d'après une seule. Partant, on est en présence d'un modèle spatial bidimensionnel.

4.8.3.1. DES PRÉFÉRENCES CIRCULAIRES

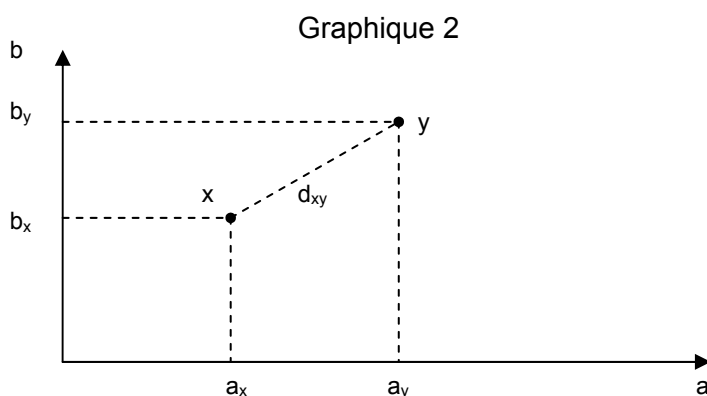
Dans le graphique suivant, les projets se caractérisent par deux dimensions, la dimension a , p.ex. le montant à dépenser pour l'éducation et par la dimension b , p.ex. le montant à dépenser pour la sécurité militaire.¹

¹ On suppose dans cet exemple que le niveau de la dépense totale n'est pas fixé d'avance. Sinon, on n'aurait strictement parlant qu'une dimension relevante pour les décisions à prendre.

Autrement dit, chaque projet x appartenant à l'espace cartésien donné par le quadrant $a \geq 0$ et $b \geq 0$ se caractérise par deux valeurs, celle le long de l'abscisse a , x_a , et celle le long de l'axe des ordonnées, x_b .



Dans l'espace euclidien, nous définissons la distance (euclidienne) entre deux projets quelconques x et y , que nous désignons par d_{xy} , comme suit :



$$d_{xy} = \sqrt{(a_x - a_y)^2 + (b_x - b_y)^2}$$

Pour chaque votant i , nous supposons qu'il existe un « point idéal » ou « bliss point » E_i qui est le point le plus préféré du votant i .¹

Plus un projet est distant du point idéal du votant i , moins ce projet est préféré par ce votant.²

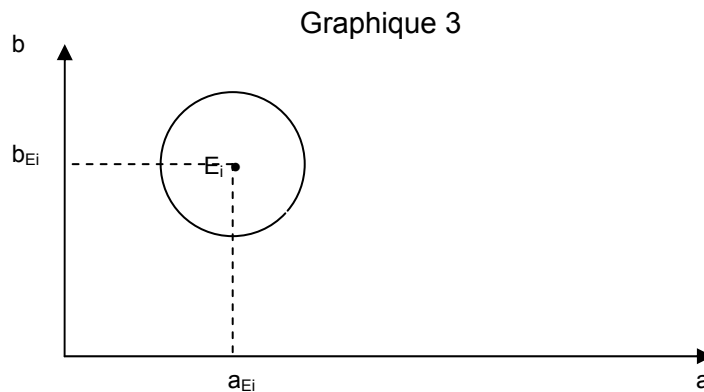
L'ensemble des projets à égale distance euclidienne du point idéal est géométriquement un cercle de rayon égal à la distance entre le point idéal et les projets en question et économiquement un ensemble de projets entre

¹ L'hypothèse d'un point le plus préféré dans l'espace euclidien à deux dimensions est particulièrement adaptée dans l'analyse de la fourniture de biens publics p.ex. le montant dépensé pour l'éducation et le montant dépensé pour le sport. En règle générale, peu de personnes souhaitent des dépenses nulles ou infinies.

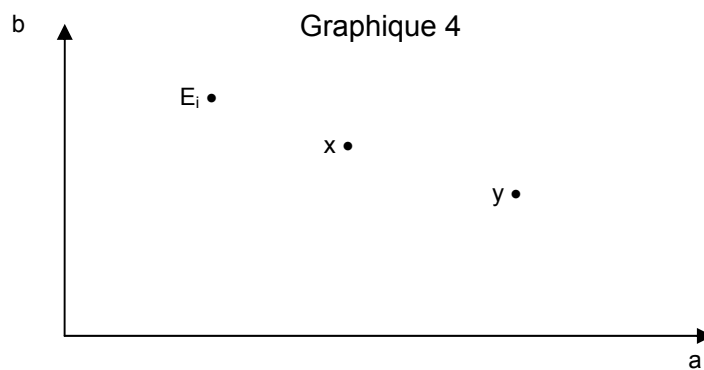
² Il existe d'autres définitions de la distance. Les courbes d'indifférence peuvent aussi prendre d'autres formes, p.ex. celle d'une ellipse. Tel serait le cas si les préférences étaient toujours séparables, mais que les deux dimensions étaient à importances relatives différentes. Dans ce cas, la distance ne serait pas égale à la simple longueur dans l'espace. Donc, la distance est un concept plus large. Prenez une sphère, la terre. On peut définir la distance entre deux points appartenant à la sphère, à partir d'un grand cercle passant par les deux points, mais cette distance n'est pas une longueur traditionnelle. Dans nos réflexions, avec des courbes d'indifférence circulaires, « distance » et « longueur » coïncident. Notons encore que la circularité des courbes d'indifférence implique la convexité, mais l'inverse n'est pas vrai, comme l'illustre précisément la possibilité de courbes d'indifférence ayant la forme d'une ellipse.

lesquels le votant est indifférent, une courbe d'indifférence. Les projets au-delà d'une courbe d'indifférence donnée, donc à l'extérieur du cercle/courbe d'indifférence sont moins préférés, les projets à l'intérieur du cercle/courbe d'indifférence sont préférés aux projets de la courbe d'indifférence et a fortiori aux projets au-delà.

Dans le graphique ci-après, on représente une courbe d'indifférence donnée du votant i dont le point idéal est E_i :



Prenons maintenant deux projets x et y quelconques :

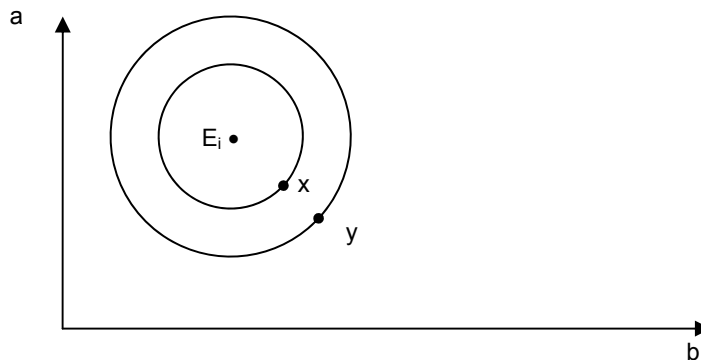


Le projet x est préféré au projet y puisque sa distance au projet idéal, $d_{E_i x}$, est inférieure à la distance $d_{E_i y}$ du projet y par rapport au projet idéal E_i .

Les points à distance égale du projet idéal sont indifférents entre eux et constituent une courbe d'indifférence.

En l'occurrence, tous les projets appartenant au cercle passant par le projet x sont indifférents entre eux, de même que sont indifférents entre eux les projets appartenant au cercle, à rayon plus élevé, passant par y .

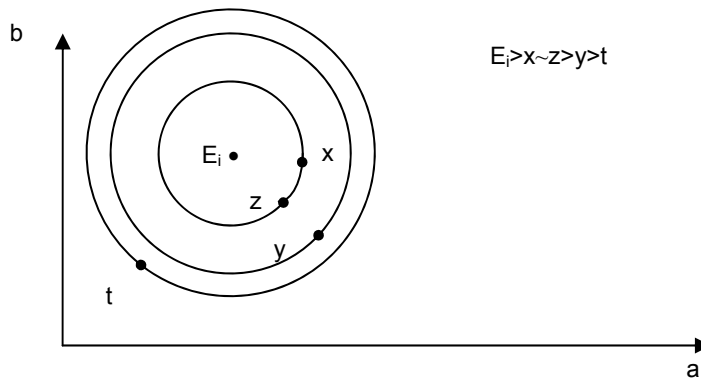
Graphique 5



Comme la courbe d'indifférence passant par le projet x a un rayon inférieur à celle passant par le projet y, x est préféré à y, tout comme n'importe quel projet appartenant à la courbe d'indifférence passant par x est préféré à n'importe quel projet appartenant à la courbe d'indifférence passant par y.

Nous pouvons résumer et conclure que les préférences de chaque votant peuvent être représentées par une carte d'indifférence composée d'une infinité de cercles concentriques, les courbe d'indifférence, de centre E_i .

Graphique 6



Devant le choix entre deux projets à distance différente de son projet idéal, le votant i préférerait le projet le moins distant et choisirait (sauf vote stratégique que nous excluons) ce projet.

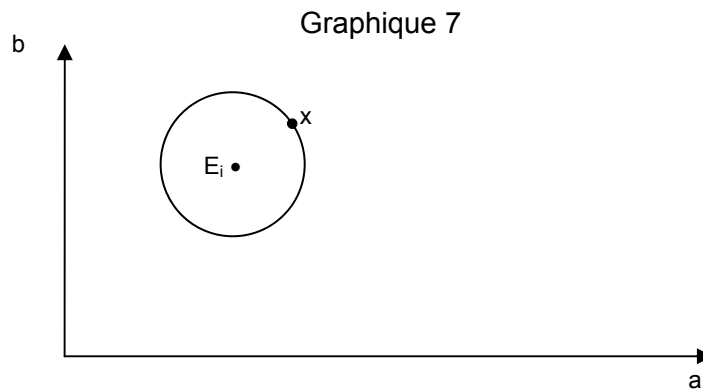
Souvent, tout ceci est encapsulé à travers une fonction d'utilité pour le votant i , U_i , définie comme :

$$U_i = -d_{E_i x} = -|x - E_i|$$

4.8.3.2. QUELQUES CONCEPTS IMPORTANTS : WINSET, PARETO SET ET COURBE DE CONTRAT

Nous allons maintenant introduire un certain nombre de concepts importants per se et pour l'analyse qui suivra.

Soit E_i le point idéal d'un votant i , soit un projet x quelconque et soit la courbe d'indifférence circulaire passant par le projet x de rayon $d_{E_i x}$.

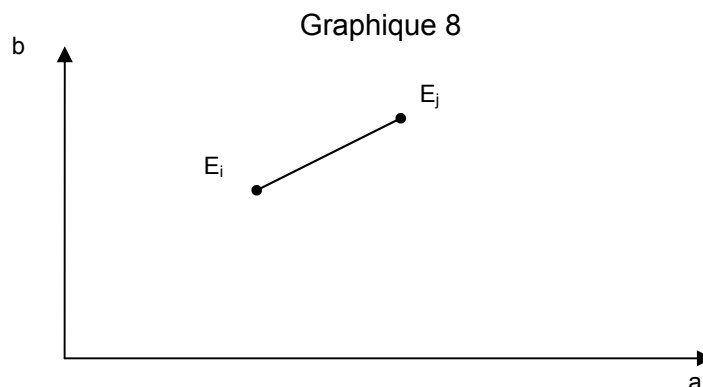


L'ensemble des projets de l'espace cartésien délimité par les axes a et b que le votant i préfère strictement au projet x est appelé le winset du votant i par rapport au projet x , que nous dénotons par $w_i(x)$.

Le winset $w_i(x)$ est donc l'ensemble des projets situés à l'intérieur du cercle donné par la courbe d'indifférence passant par x et de centre E_i , à l'exception de la courbe d'indifférence même.

Le winset du votant i par rapport à son point idéal E_i , $w_i(E_i)$, est par définition vide, soit $w_i(E_i) = \emptyset$. Il n'existe pas, par définition, de point qu'un votant préfère à son bliss point.

Prenons maintenant deux votants i et j avec leurs points idéaux respectifs E_i et E_j . Liant ces deux points idéaux par l'intervalle fermé $[E_i, E_j]$.



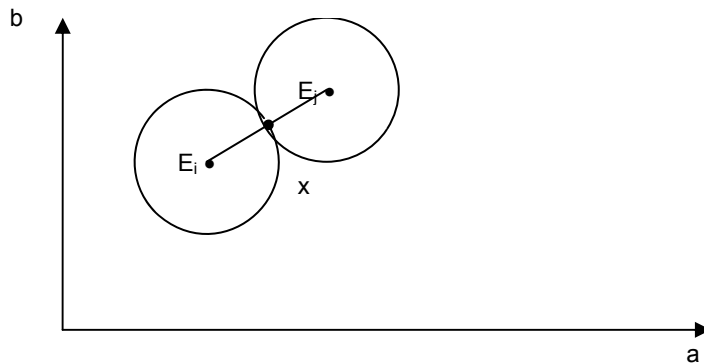
Ce lien est la courbe de contrat pour les deux votants i et j , que nous écrivons C_{ij} .

La courbe de contrats, toujours définie pour deux votants i et j , reprend l'ensemble des points où, chacun de ces points se caractérisant par le fait qu'il n'existe pas d'autre point qui lui serait unanimement préféré. Autrement dit, tout mouvement, à partir d'un point donné de la courbe de

contrat et le long de cette courbe de contrat bénéficierait à l'un et désavantagerait l'autre.

Dit encore autrement, chaque projet appartenant à la courbe de contrat, à l'instar du projet x dans le graphique ci-après, est un point de tangence entre une courbe d'indifférence du votant i et une courbe d'indifférence du votant j .

Graphique 9



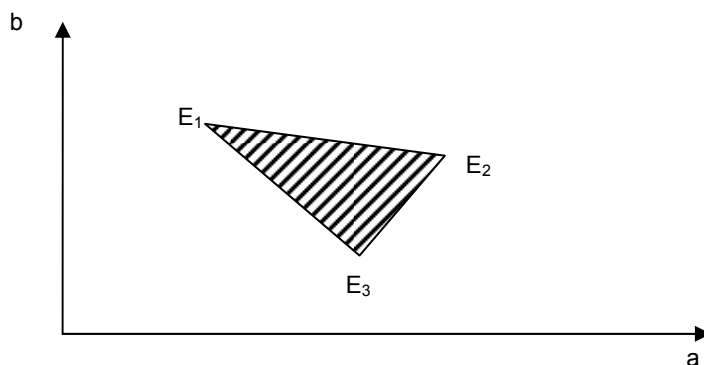
Le Pareto set est défini comme l'ensemble des projets α où α se caractérise par le fait qu'il n'existe pas par rapport à α de projet qui serait unanimement préféré au projet α .

Si le nombre de votants est égal à deux, donc si $n=2$, la courbe de contrat et le Pareto set sont identiques.

Si $n>2$, tel n'est pas le cas.¹

Prenons le cas où $n=3$ et E_1, E_2 et E_3 les points idéaux respectifs des trois votants.

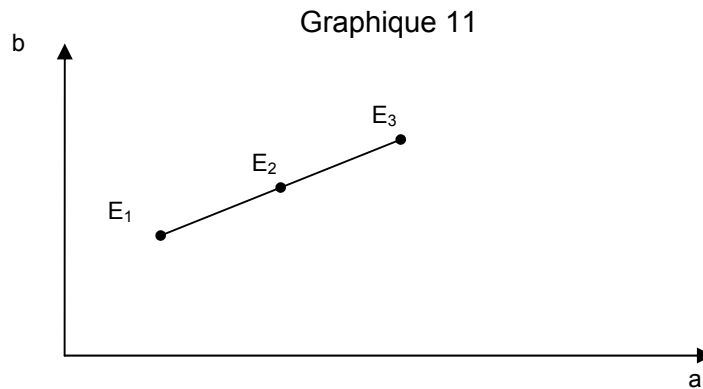
Graphique 10



Il y a trois courbes de contrats, $C_{12}[E_1, E_2]$, $C_{13}[E_1, E_3]$ et $C_{23}[E_2, E_3]$. Le Pareto set est la surface hachurée délimitée par les trois points idéaux.

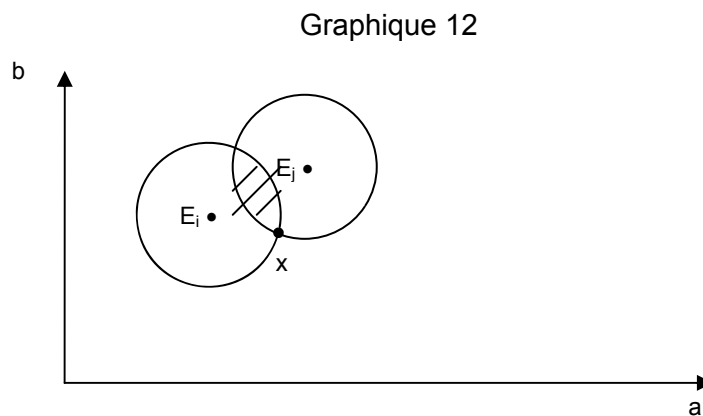
¹ Si p.ex. $n=3$, il y a un Pareto set ; si $n=4$, il y a le Pareto set pour les 4 votants, et il y aura les Pareto set (1,2,3) ; (1,2,4) ; (1,3,4) ; (2,3,4) pour chaque fois 3 votants.

Notons qu'il y a pour $n=3$ un cas particulier, théoriquement très important même si pratiquement peu probable, à savoir où les trois points idéaux sont alignés.



On y reviendra.

Prenons maintenant deux votants avec leurs points idéaux respectifs E_1 et E_2 et les courbes d'indifférence respectives passant par un projet x quelconque.



On a les winset respectifs par rapport au projet x du votant 1, $w_1(x)$, et du votant 2, $w_2(x)$.

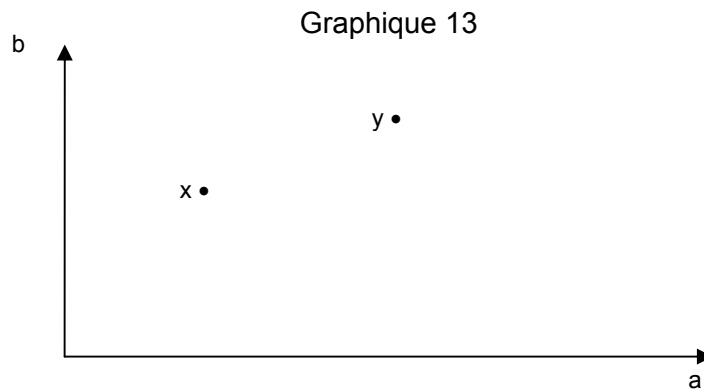
L'intersection entre les deux winsets individuels donne le winset (tout court) du projet x , que nous dénotons $w(x)$, donc :

$$w(x) = w_1(x) \cap w_2(x)$$

Cette intersection est en l'occurrence la surface hachurée. Ce sont tous les projets qui sont unanimement préférés par les deux votants au projet x .

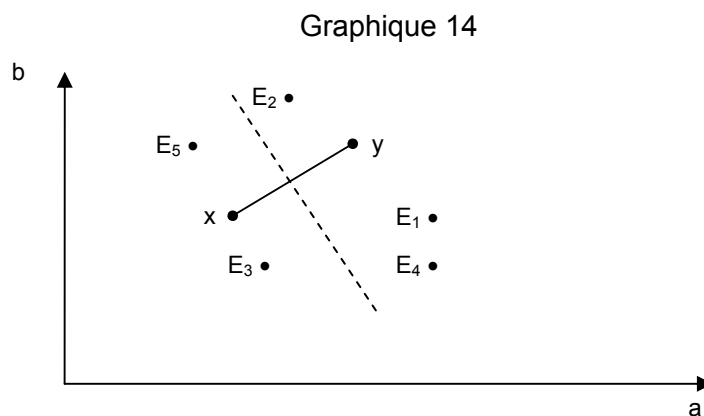
Pour terminer, montrons encore comment pour deux projets quelconques et pour n votants, on peut graphiquement déterminer si un des deux projets est majoritairement préféré à l'autre.

Soient donc deux projets x et y (graphique 13).



Supposons que les cinq points idéaux soient respectivement E_1 , E_2 , E_3 , E_4 et E_5 .

Liant maintenant les deux projets x et y par une droite passant par x et y et traçant une deuxième droite perpendiculaire à la première et la coupant au milieu de cette droite $[x,y]$.



Un projet x l'emporte majoritairement contre un autre projet y si le nombre de points idéaux de son côté donné par la perpendiculaire, y compris le long de la perpendiculaire, est supérieur au nombre correspondant pour l'autre projet.

Force est de constater que du côté du demi-espace donné par la perpendiculaire et auquel appartient le projet y , l'on trouve une majorité de points idéaux, à savoir les trois points idéaux E_1 , E_2 et E_4 contre seulement deux points idéaux, E_3 et E_5 , de l'autre côté.

4.8.3.4. ANALYSE DE L'EXISTENCE D'UN POINT D'ÉQUILIBRE

La question que nous devons nous poser est de savoir s'il existe un point dans l'espace multidimensionnel, en l'occurrence bidimensionnel – comparable au point médian du votant médian dans la problématique unidimensionnelle – qui l'emporterait à la majorité contre n'importe quel autre point. Autrement dit, existe-t-il un point que l'on peut qualifier de point

d'équilibre en ce sens qu'il l'emporte contre n'importe quel autre point dans une confrontation bilatérale selon la règle majoritaire ?

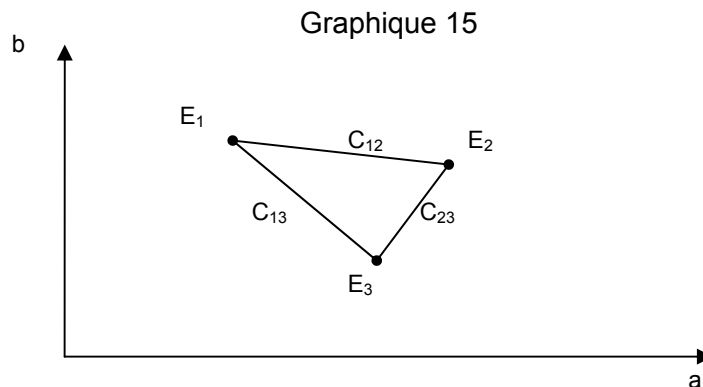
Interrogeons-nous donc s'il existe, dans l'espace euclidien, un projet d'équilibre défini comme un projet qui est majoritairement préféré à chacun des projets possibles. D'autres expressions pour le concept d'équilibre sont « *Condorcet winner* », « *point dominant* », « *core point* », « *Plott equilibrium* » ou « *empty-winsset point* ».

Nous allons procéder à cette analyse d'abord pour $n=3$ et ensuite $n=5$.

Commençons avec le cas où $n=3$ avec les points idéaux respectifs des trois votants E_1 , E_2 et E_3 , les trois points idéaux étant supposés différents.¹

Soit la configuration suivante. Ce que nous allons constater s'appliquerait à n'importe quelle autre configuration, sauf à celle, exceptionnel et, à laquelle on reviendra plus tard, où les trois points idéaux sont alignés.

Le graphique suivant reprend les trois points idéaux et les trois courbes de contrat C_{12} , C_{13} et C_{23} .



Analysons successivement les questions suivantes :

1. Un point idéal est-il un point d'équilibre ?
2. Un des points appartenant aux courbes de contrats est-il un point d'équilibre ?
3. Le projet médian M est-il un point d'équilibre ?
4. Un autre projet que M du Pareto set est-il un point d'équilibre ?
5. Un projet en dehors du Pareto set est-il un point d'équilibre ?

Nous allons montrer que la réponse à chacune de ces cinq questions est non, autrement dit, dans cette configuration, il n'existe pas de point d'équilibre ou Condorcet winner.

¹ Analysez ce qui se passe si tel n'est pas le cas.

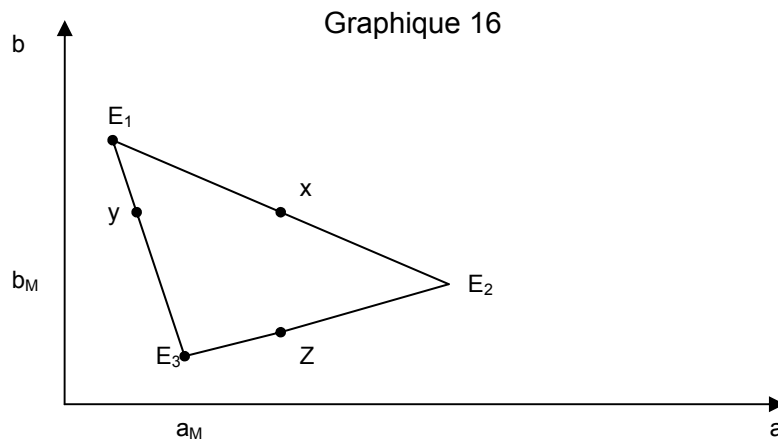
Aucun des trois points idéaux n'est un point d'équilibre.

Prenons E_1 . E_1 n'est pas un point d'équilibre puisque p.ex. chaque point le long de la courbe de contrat C_{23} est majoritairement préféré au point E_1 .

Cette conclusion s'applique, mutatis mutandis, à chacun des deux autres points idéaux.

Quant à l'interrogation 2, on peut montrer que pour n'importe quel projet x appartenant à une des courbes de contrat, il existe toujours (au moins) un autre point qui lui est majoritairement préféré.

Le graphique ci-après illustre ce constat. Soit un projet x . Il existe des projets, p.ex. les projets y ou z , chacun préféré par une majorité, certes différente, au projet x .

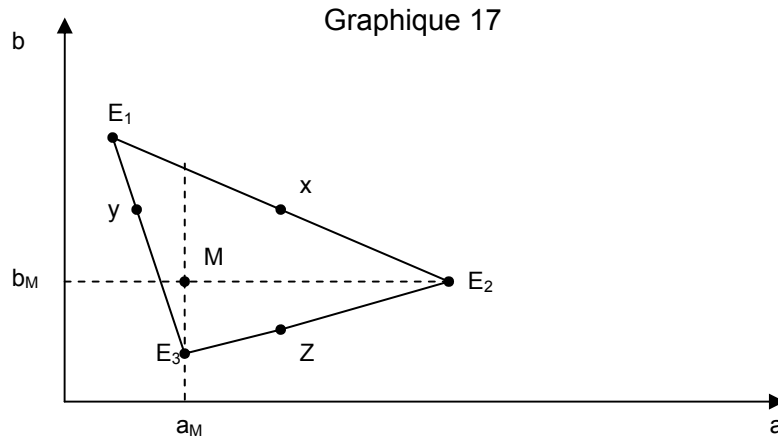


Quant à l'interrogation 3, donnons tout d'abord une définition du point médian, désigné par M , pour voir ensuite s'il peut constituer un point d'équilibre.

Un point est le point médian s'il est le médian le long de chacune des deux axes, donc si chacune de ses deux caractéristiques est médiane le long de sa dimension respective.

Dans le graphique ci-après, le point médian est le point M .

Son abscisse a_M est la médiane le long de la dimension a et son ordonnée b_M est la médiane le long de la dimension b . C'est en quelque sorte le centre de gravité.

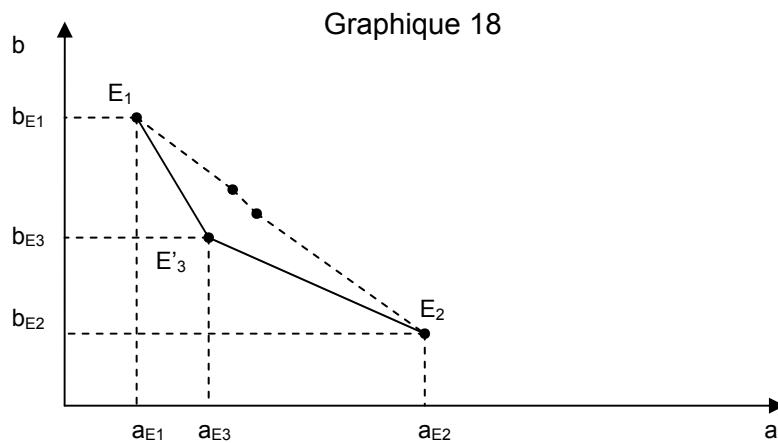


Le point M n'est pas le Condorcet winner. Il existe des points qui le dominent, c.-à-d. lui sont majoritairement préférés.

Prenons p.ex. le point x. Ce dernier point, sans être un Condorcet winner, est majoritairement préféré, par les votants 1 et 2, au point M.

On pourrait s'interroger si la réponse était différente si un des points idéaux était également le point médian.

La réponse est non comme l'illustre le graphique 18 ci-après, où E_3 est le point médian sans être un point d'équilibre.



Passons à la quatrième interrogation si un des autres points du Pareto set peut être un point d'équilibre. La réponse est non. Pour chacun de ces points, il existe toujours (au moins) un point qui le domine majoritairement.

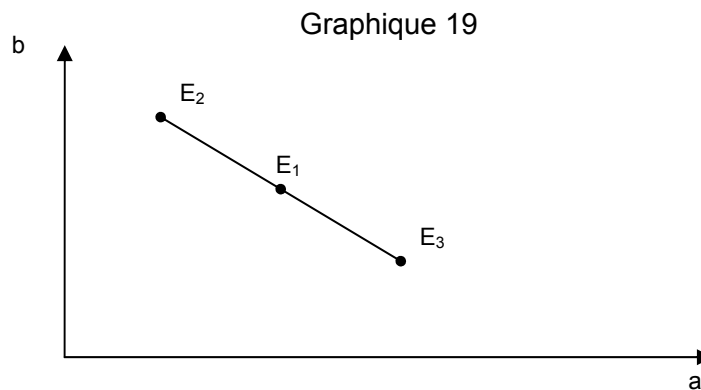
Peu importe le point appartenant au Pareto set, l'on trouve toujours un autre point, de surcroît pas forcément dans le Pareto set, qui lui est préféré.

Quant à la cinquième et dernière interrogation, un point en dehors du Pareto set, donc en l'occurrence en dehors du triangle, ne saurait être un point d'équilibre puisque chacun de ces points, par définition du Pareto set, est un point pour lequel il existe des points qui lui sont préférés unanimement.

Nous devons conclure que pour cette configuration type, il n'existe pas de point d'équilibre dans l'espace euclidien des projets possibles pour trois votants.¹

Ce constat comporte un certain nombre de conséquences auxquelles on reviendra, une fois mis en évidence le cas exceptionnel pour $n=3$ et une fois analysé le cas où $n=5$.

Considérons maintenant le cas particulier où les trois points idéaux sont alignés, c.-à-d. peuvent être reliés par une seule droite.



Un des trois points idéaux, en l'occurrence le point idéal du votant 1, E_1 , se trouve entre les deux autres points idéaux, sans que sa localisation doit être nécessairement le milieu de l'intervalle fermé $[E_2, E_3]$.

La courbe de contrat $[E_2, E_3]$ englobe, en quelque sorte, les courbes de contrat $[E_2, E_1]$ et $[E_3, E_1]$. Le Pareto set est l'intervalle fermé $[E_2, E_3]$.

Que constatons-nous ? Mais dans pareil cas, un Condorcet winner existe. Montrons-le.

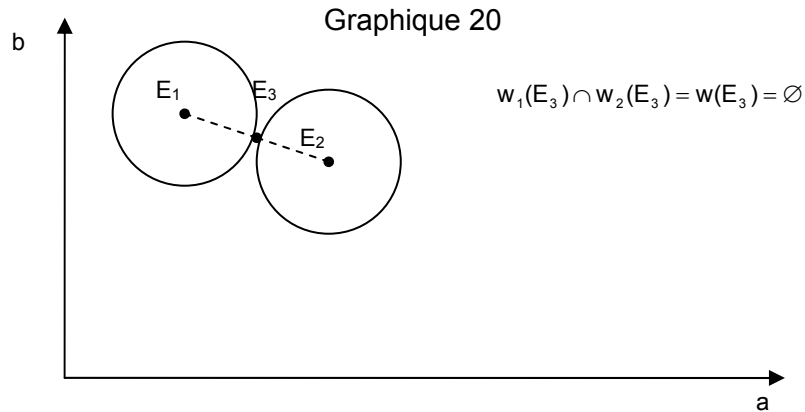
Chaque point situé le long de l'intervalle semi-ouvert $[E_2, E_1[$ est majoritairement rejeté par les votants 1 et 3 et chaque point situé le long de l'intervalle semi-ouvert $]E_1, E_3]$ est majoritairement rejeté par les votants 2 et 1.

Autrement dit, pour chaque point le long de l'intervalle semi-ouvert $[E_2, E_1[$ il existe un point majoritairement préféré le long de $[E_1, E_3]$ et pour chaque point le long de $]E_1, E_3]$, il existe un point majoritairement préféré le long de $[E_2, E_1[$.

Seul pour le point E_3 , tel n'est pas possible. E_3 est le Condorcet winner. A sa gauche, il y a un point idéal, E_2 , et à sa droite, il y a un point idéal, E_3 .

¹ On dit aussi que le core est vide, c.-à-d. qu'il n'existe pas de point dans l'espace politique bidimensionnel qui ne pourrait pas être battu à travers une coalition majoritaire, par au moins un des autres points de l'espace. Notons qu'il existe encore dans la littérature le concept de « *uncovered set* » (ensemble découvert). Le « *uncovered set* » est l'ensemble des projets x tel que, pour tous les autres projets y concevables, soit x est majoritairement préféré à y , soit il existe un projet \tilde{y} tel que x bat \tilde{y} qui à son tour est majoritairement préféré à x . Le « *uncovered set* », au maximum, peut être égal au Pareto set, mais peut être (beaucoup) plus petit. Si le 'uncovered set' est un singleton, c'est le Condorcet winner.

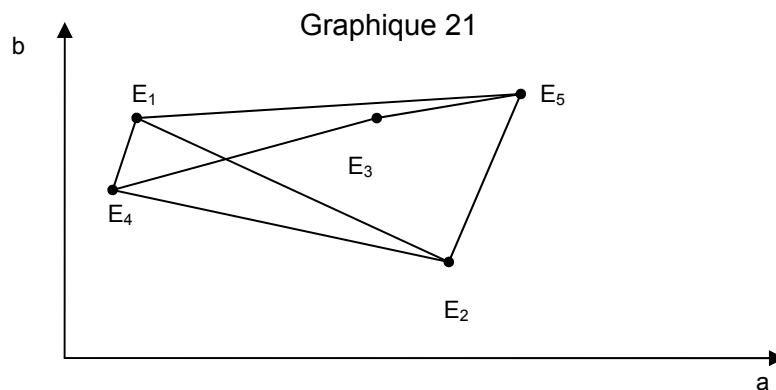
Exprimons cela encore autrement. Le winset du votant 1 par rapport au point E_3 , $w_1(E_3)$, et le winset du votant 2 par rapport au point E_3 , $w_2(E_3)$, ont une intersection, le winset (tout court) du bliss point E_3 , $w(E_3)$, qui est vide.¹



En conclusion, si $n=3$, il n'existe pas de point d'équilibre à moins qu'il se réalise la configuration somme toute peu probable où les trois points idéaux sont alignés. Dans ce dernier cas, un point d'équilibre existe et il s'agit de celui des trois points idéaux qui se localise entre les deux autres.

Passons maintenant au scénario où $n=5$. On y verra que, mutatis mutandis, la conclusion est la même.

Soient donc les points idéaux E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5 des cinq votants et considérons la configuration suivante où nous avons indiqué les courbes de contrat.



Nous allons montrer qu'aucun de ces points idéaux n'est un point d'équilibre.

Prenons le point idéal du votant E_3 , qui, de surcroît, renferme la médiane le long de la dimension a ($a_{E_4} < a_{E_1} < a_{E_3} < a_{E_2} < a_{E_5}$) et la médiane le long de la dimension b ($b_{E_2} < b_{E_4} < b_{E_3} < b_{E_1} < b_{E_5}$).

Ce point n'est pas un point d'équilibre.

¹ Une autre façon d'exprimer ce résultat serait que deux points sont diamétralement opposés à un troisième, et, partant, se neutralisent.

En effet, prenons p.ex. le triangle $E_1E_2E_4$ qui est le Pareto set des trois votants 1, 2 et 4. Chaque point appartenant à ce triangle est majoritairement préféré au point E_3 .

On peut montrer que ceci est vrai pour n'importe quel point appartenant à l'espace, c.-à-d. qu'il s'agisse d'un des points idéaux, qu'il appartienne au Pareto set global délimité par $E_1E_5E_2E_4$ ou qu'il se situe en dehors de ce dernier.

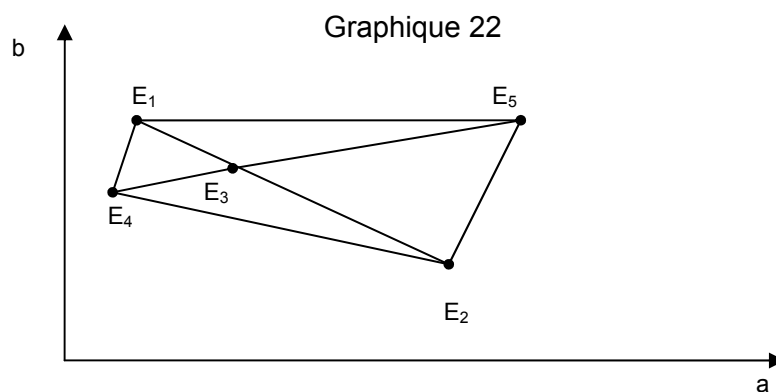
Nous constatons donc qu'il n'existe pas de point d'équilibre.

Soit maintenant deux cas particuliers.

Le premier est celui où tous les cinq points idéaux sont alignés. Etudiez cette constellation.

Le deuxième se présente comme suit. Notons la différence avec le graphique précédent. le point idéal E_3 se trouve maintenant à l'intersection de deux courbes de contrats $[E_4E_5]$ et $[E_1E_2]$.

Nous constatons que E_3 est un point d'équilibre¹. Il n'existe aucun autre point qui est majoritairement préféré au projet E_3 .



La caractéristique nécessaire pour ce résultat peut être exprimée sous deux formulations, la première, plus générale, s'appliquant à des préférences pas forcément circulaires, mais nécessairement convexes, la deuxième, moins générale, car s'appliquant seulement à des préférences circulaires.²

Première formulation :

Pour qu'un point x^* soit un équilibre, il est nécessaire et suffisant que les préférences des votants sont arrangées comme suit :

1. x^* est le point idéal d'un des votants et

¹ Nous constatons que E_3 est toujours le « *point médian* ». Mais cela, comme on vient de le voir, n'est pas une condition suffisante pour être un point d'équilibre. C'est une condition nécessaire. Si un point d'équilibre existe, il est médian (?). Pour terminer, notons que (cf. Enlow et Hinich) si un point d'équilibre existe, cela ne doit pas être forcément un des points idéaux.

² cf. Paul Johnson, *Social Choice. Theory and Research*, Sage University Press, chapter 6, p. 60, et plus particulièrement p. 65 et p. 71.

- 2. les votants restants peuvent être regroupés en paires de sorte que les courbes de contrats respectives de ces paires passent toutes par le point x^* .

Dans le cadre de notre configuration du graphique 22, les points idéaux E_1 , E_2 , E_4 et E_5 peuvent être regroupés en paires (E_1E_2) et (E_4E_5) dont les courbes de contrats respectifs ont une intersection commune qui est le point idéal E_3 , qui, partant, est le point d'équilibre.

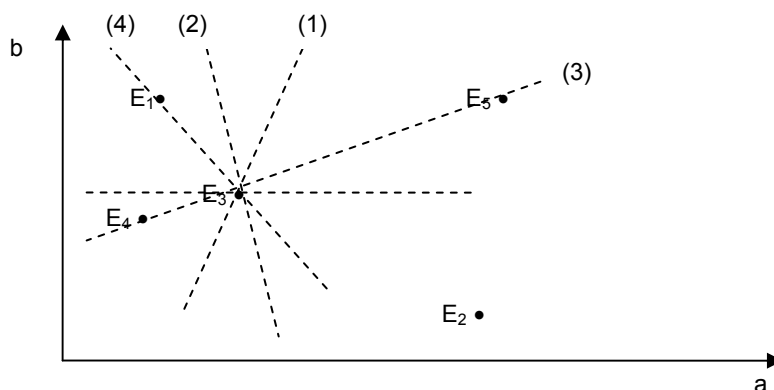
Deuxième formulation :

Un projet x^* est un projet d'équilibre s'il est un des points idéaux et s'il est une 'médiane dans toutes les directions', ce qui signifie que peu importe la droite que l'on trace à travers x^* , il existe de chaque côté d'une telle droite un nombre de points idéaux au moins égaux à la moitié (si n est pair)/majorité (si n est impair) des points idéaux, un point idéal appartenant à une telle droite étant compté dans le total de chacun des deux côtés.

Notons qu'une ligne médiane joue, en fait, le même rôle qu'une courbe de contrat particulière, à savoir une courbe de contrat qui est une droite.

Peu importe la droite que nous tirons à travers E_3 , une telle droite sépare l'espace en deux demi-espaces avec toujours dans chaque demi-espace le même nombre de points idéaux, y compris ceux appartenant à la droite de séparation des deux côtés de la droite. Dans le graphique 23 ci-après où nous avons tracé quatre droites de ce type (1), (2), (3) et (4), chacune passant précisément par E_3 .

Graphique 23



Prenons la droite (1). D'un côté, il y a les points idéaux E_1 , E_4 et E_3 , de l'autre, il y a les points idéaux E_5 , E_2 et E_3 . De chaque côté, il y a au moins la moitié des points idéaux.

Prenons la droite (3). D'un côté, il y a les points idéaux E_2 , E_4 , E_3 et E_5 , de l'autre côté, il y a les points idéaux E_1 , E_4 , E_3 et E_5 .

Prenons encore la droite (4). D'un côté, il y a les points E_1 , E_4 et E_1 , de l'autre côté, il y a les points E_1 , E_3 , E_5 et E_2 . De chaque côté, de nouveau, il y a au moins une majorité.

Notre conclusion pour $n=5$ est donc égale, mutatis mutandis, à celle pour $n=3$. Si pour $n=3$, un point d'équilibre n'existe que si les trois points idéaux sont alignés, on a avec $n=3$ un point d'équilibre si les 5 points idéaux sont alignés ou si la propriété d'une médiane dans toutes les directions est remplie.

Quoiqu'il en soit, s'il n'est pas impossible qu'un point d'équilibre existe, la probabilité est cependant réduite car une configuration des points idéaux, peu importe leur nombre, pour que tel soit le cas, doit satisfaire à certaines caractéristiques exigeantes, partant, restrictives et assez peu probables.

Ce résultat que nous venons d'illustrer, constitue ce que l'on appelle dans la littérature le théorème de Plott¹ que l'on peut formuler, de façon heuristique, et « actualisée » comme suit :

Si les préférences des votants sont circulaires et si leurs points idéaux respectifs satisfont à la caractéristique, peu probable, de l'existence d'une médiane dans toutes les directions, par rapport à l'un des points idéaux, E_i^* , alors il existe un point d'équilibre qu'est précisément le point idéal E_i^* .

Ce résultat² comporte deux éléments importants.

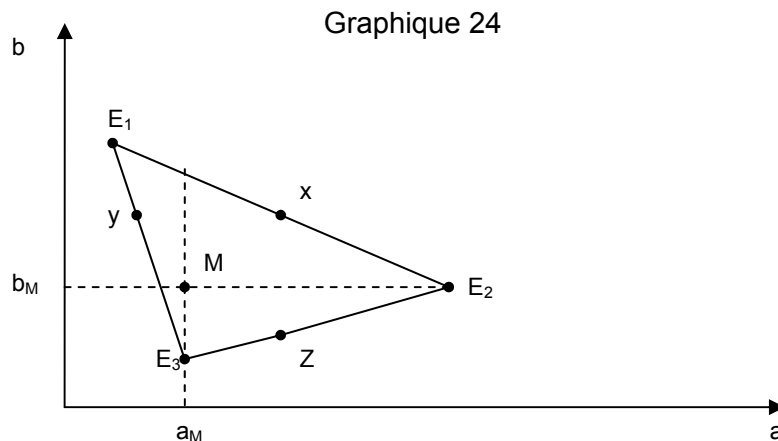
Il est, premièrement, possible qu'un point d'équilibre existe, mais, deuxièmement, seulement sous des conditions bien exigeantes, car très restrictives, et, partant, assez peu probables.

Il nous reste maintenant à analyser ce qui se passe ou peut se passer si un point d'équilibre n'existe pas. Faisons-le avant tout pour $n=3$. Cette analyse nous permettra d'illustrer un autre théorème important qui part en quelque sorte du théorème de Plott, à savoir le théorème de McKelvey ou théorème du chaos.

On va montrer tout d'abord qu'il existe des cycles de vote comprenant trois points. A cette fin, l'on reprendra dans le graphique 24 le graphique 16 précédent.

¹ Charles Plott (1938) est un mathématicien économiste. D'aucuns estiment qu'il aurait pu avoir le prix Nobel avec Vernon Smith. Plott a noté que : "Samuelson has demonstrated that the equilibrium attained by the market mechanism for a public good will, in general, fail to be an optimum. The analysis here implies that a majority rule political process will fail to reach an equilibrium at all. Thus, in the case of public goods, society can count on neither the market nor a majority rule political process to be a desirable allocative device." (Plott, cite par Batina et Ihori, *Public Goods*, Springer, 2005). On attribue également à Plott la formule : préférences x institutions = résultat. Cette équation est quelques fois appelée l'équation fondamentale de la politique.

² Cette formulation strictement parlant ne s'applique que si le nombre de votants est impair. S'il est pair, les choses se compliquent quelque peu, entre autres parce que le point d'équilibre, s'il existe, sera un point différent de l'un des points idéaux.



Soit le projet x . Il est majoritairement préféré, par les votants 1 et 2, au projet M . Le projet y est majoritairement préféré, par les votants 1 et 3, à x . S'il y avait transitivité, on aurait que y est préféré majoritairement à M . Or, tel n'est pas le cas, au contraire M est préféré majoritairement, par les votants 2 et 3, au projet y . Donc, on a $x > M$ et $y > x$, mais $M > y$.

Ce constat établi, changeons quelque peu d'optique et émettons la conjecture que le vote à la majorité nous mène de chaque point à l'extérieur du triangle à un point à l'intérieur, c.-à-d. dans le Pareto set, et que, à défaut de trouver un équilibre, une fois dans le Pareto set pour le moins on va y rester.

Cette conjecture est fautive. Considérons le graphique 25.

Partons, disons, du point M appartenant au Pareto set. Le point t , à l'extérieur du Pareto set, est préféré au point M par une majorité de votants, à savoir les votants 1 et 2.¹

Ceci dit, l'on peut trouver un point préféré majoritairement au point t , p.ex. le point m préféré par les votants 2 et 3. Le point k est majoritairement préféré par les votants 1 et 2 au point m et ainsi de suite.

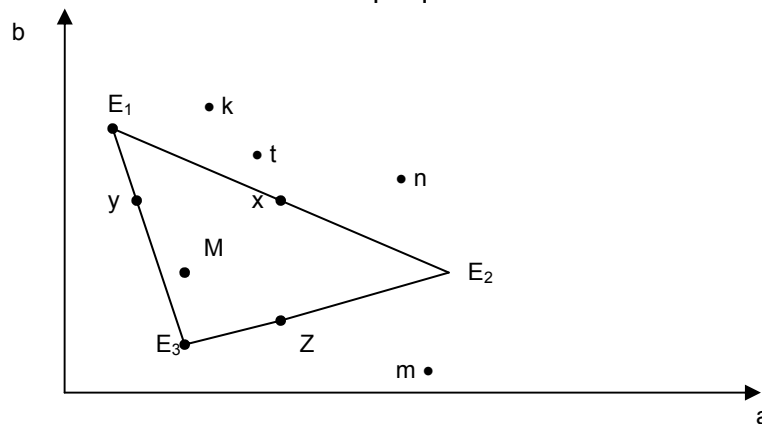
Le fait est que, de façon générale, l'on arrive à passer de n'importe quel point de l'espace, qu'il soit à l'intérieur ou à l'extérieur du Pareto set à n'importe quel autre point, qu'il soit à l'intérieur ou à l'extérieur du Pareto set de l'espace.

Comme l'exprime Johnson² : *“By hopping in this fashion, the agenda can go as far from [a given point] as we would like, and each step is preferred by a majority ! The most puzzling and troublesome fact about this voting agenda is that majority rule can lead outside the Pareto set.”*

¹ Le fait que t qui est à l'extérieur du Pareto set est majoritairement préféré à M fait dire à Hinich et Munger: « *Majority rule may lead to an outcome that the entire society unanimously thinks is worse than other feasible alternative.* » En effet, le point x dans le graphique 25 serait clairement préféré à t .

² P. Johnson, *Social Choice*, Sage University Paper, 1998, p. 79.

Graphique 25



Ce constat illustre l'intuition clé du théorème de McKelvey appelé encore théorème du chaos.

Le théorème de R. McKelvey¹, en partant du constat du théorème de Plott quant aux conditions d'existence restrictives d'un point d'équilibre, nous amène une étape plus loin en concluant, pour le cas où il n'y a pas de Condorcet winner pour la règle majoritaire que le résultat du vote majoritaire est, en règle générale, chaotique en ce sens que l'on peut par application itérative de cette dernière passer de n'importe quel point x de l'espace à n'importe quel autre point y de l'espace et repasser du point y au point x.²

Si la transitivité s'écroule, alors elle s'écroule totalement, générant un cycle qui englobe l'ensemble de l'espace politique.

Autrement dit, McKelvey a montré³ – ce que nous venons d'illustrer à travers l'existence du graphique 25 ci-dessus – que s'il n'y a pas de point d'équilibre, l'on peut trouver un agenda qui nous fait passer de n'importe quel point x, qu'il soit dans le Pareto set ou non, à n'importe quel point y, qu'il soit dans le Pareto set ou non, et ceci à travers une séquence de points partant de x et passant par une suite de points $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, pour finir par aboutir à y tel que $x < z, z_1 < z_2, z_2 < z_3 \dots z_{n-1} < z_n$ et finalement $z_n < y$.⁴

Qui plus est, l'on pourrait repasser, par une autre séquence, du point y au point x.⁵

¹ Richard McKelvey (1944-2002) a été un mathématicien spécialisé dans l'analyse politique.

² Ce résultat s'applique à tout espace multidimensionnel à plus d'une dimension.

³ cf. par exemple l'excellent livre de P. Johnson, *Social Choice*, chapitre 6 ou *Feldman and Serrano*, chapter 12.

⁴ Feldman et Serrano, dans *Welfare Economics and Social Choice Theory*, 2nd édition, Springer, 2006, p. 270, notent: "This process of moves from [x to z₁, to z₂, etc.] can evidently require large jumps... and those jumps might be large enough to require negative coordinates. In fact McKelvey's theorem takes the choice space as the entire m-dimensional space, rather than the m-dimensional non-negative orthant. So this creates a possible restriction on the scope of McKelvey's theorem: if negative quantities are not possible, the McKelvey cycling possibility may be restricted. Another possible restriction has to do with the assumption of concentric circular indifference curves, but a few years after his first paper McKelvey provided a generalization of this theorem that dispenses with this restrictive assumption."

⁵ Autrement dit, on peut passer de x à y, avec $y > x$, de y à z avec $y > z$ et finalement de z à x avec $x > z$.

Autrement dit, tous les points de l'espace politique des points possibles sont 'connectés' par un grand cycle de vote, décomposable en autant de sous-cycles que concevables.

Dans une telle situation de « *cyclicité généralisée* », où chaque point est théoriquement possible, la porte est grandement ouverte à la manipulation puisque celui qui a le contrôle de l'agenda (« *agenda setter* ») peut, à travers une séquence finie de votes, faire aboutir le processus de décision à un point désiré, donc à son « *bliss point* », peu importe où ce dernier se situe dans l'espace.

Shepsle a résumé cela, un peu abusivement il est vrai, en concluant qu'« *Anything goes* »¹.

A noter qu'Ordeshook, dans *Game Theory and Political Theory*, p. 81, relativise cette dernière affirmation dans la mesure où le résultat de McKelvey n'est pas de substance ou empirique, mais, strictement parlant, purement logique.

De même, McCarty et Meirowitz, dans *Political Game Theory*, Cambridge University Press, 2007, p. 79, notent :

*“Some have interpreted McKelvey’s result to predict political chaos : Choices are unstable with observable cycles. This interpretation is naive ; it attributes a positive prediction to a model that does not make any. A more reasonable interpretation is that the results demonstrate the importance of investigating the effects of political institutions within which collective choices are made. The conclusion, therefore, is that a model that takes as a primitive only preferences and a preference aggregation rule is often underspecified.”*²

Sur ce point, et pour terminer, citons Austen and Banks, *Positive Political Theory I*, p. 184: “... it is important to emphasize that these instability and chaos theorems are results on the consistency of the various means of aggregating individual preferences. As such they are not results on individual behaviour or the aggregation of such behaviour, they are facts about the formal properties of preference aggregation rules on given sets of profiles. In particular, the results do not predict that political behaviour is chaotic or that “anything can happen”. Instead, they demonstrate that we can not view or explain collective behaviour as simply an exercise in selecting best alternatives according to some social preference relation.”

Une fois dégagés les résultats de Plott, de McKelvey et des résultats similaires, et face au constat qu'il existe en pratique une stabilité politique certaine, et certainement plus que les résultats théoriques ne feraient anticiper, on s'est interrogé précisément sur des raisons possibles d'une certaine stabilité.

¹ cf. Kenneth Shepsle, *Analyzing Politics*, Norton, 2010, p. 107.

² Une analogie de ce constat serait la construction d'un modèle d'un automobiliste qui avec sa voiture peut se déplacer dans un espace uniforme, n'importe comment et n'importe où. Si on ajoutait maintenant la contrainte d'un réseau routier existant, les déplacements seraient contraints et n'importe quel déplacement ne serait plus possible.

Citons à ce sujet Hinich et Munger¹ : *“One is led to ask whether there is any Condorcet winner in spaces of more than one dimension, even assuming that preferences are separable and single-peaked. Again the answer is generally no. As Plott, McKelvey and Cox, among others, have shown, in the absence of (1) restrictions on the configuration of ideal points in (2) institutions that restrict the sequence of proposals (such as germaneness rules that require members to vote one issue at a time) majority rule processes are chaotic... There is difficulty with all the institutionally oriented answers to Tullock’s famous “why so much stability?” question. Even if institutions serve the roles claimed, where do they come from? Why do some institutions disappear or others survive?... These hard questions have been posed in different forms. We don’t yet have good answers for them. But the answers, when they come, will tell us much about how human societies change and grow while others witter and die. Though in some ways we have come far from Aristotle’s ancient speculation about the existence of the “middle” and its implications for the good society, these basic questions remain the heart of the matter.”*

La question reste ouverte de savoir si, soit le système est plus stable qu’on ne le pense et que tel est le cas, parce le modèle unidimensionnel du votant médian est plus approprié qu’on ne pourrait le penser, voire même parce que le modèle bidimensionnel avec des préférences qu’on aurait pu penser peu probables est plus réaliste que soupçonné ou si, par contre, le système est plus instable qu’on ne le pense, avec cependant deux sous-variantes possibles, une première sous-variante selon laquelle les institutions et les processus d’encadrement et de déroulement des décisions qu’ils véhiculent importent beaucoup et apportent une stabilité minimale au prix certes d’une certaine inefficience ou irrationalité théoriques et une deuxième sous-variante selon laquelle, nonobstant les institutions, le système contient et ne fait que difficilement contenir une (forte) instabilité inhérente.

4.9. La problématique du logrolling

Une des caractéristiques des règles de décision à la majorité des voix – que ce soit la majorité simple, la majorité absolue (50% des voix plus une) ou une majorité qualifiée (p.ex. deux tiers des voix) est que l’acceptation ou le refus d’une proposition est exclusivement fonction du nombre de voix allouées par les votants aux différents projets, mais que l’intensité des préférences quant aux différentes options dans le chef de chacun des votants n’est pas prise en considération.

Cela ne veut toutefois pas dire que ces intensités ne jouent pas un rôle et qu’elles n’influencent pas ne serait-ce qu’indirectement les résultats des votes, notamment si plusieurs décisions doivent être prises.

L’exemple ci-après illustre ce propos.

¹ Hinich and Munger, *Analytical Politics*, Cambridge University Press, 1997, p. 63 et p. 71.

Supposons qu'il y ait trois partis politiques, P_1 , P_2 et P_3 . Deux décisions sont à prendre, à savoir "moderniser ou non le théâtre" et "construire ou non une nouvelle piscine".

Nous supposons que les préférences des trois partis par rapport à ces projets sont les suivants :

	moderniser théâtre	construire piscine
P_1	oui	non
P_2	non	oui
P_3	non	non

Donc, le parti P_1 est pour la modernisation du théâtre, mais contre la construction de la piscine tandis que pour le parti P_2 , les préférences sont inversées. Le parti P_3 est contre les deux projets, disons parce qu'il veut maintenir à un strict minimum les dépenses publiques.

En soumettant chacune des deux propositions au vote, le résultat est qu'une majorité s'exprime contre la modernisation du théâtre et qu'une majorité s'exprime contre la construction d'une piscine.

Cela arrange bien le parti P_3 puisque le résultat est toujours conforme à ses préférences dans la mesure où il est à la fois contre la construction de la piscine et contre la modernisation du théâtre. Par contre, pour les parties P_1 et P_2 les choses se présentent de façon plus ambiguë.

Supposons dans ce contexte que le parti P_1 considère que le fait d'avoir eu satisfaction de parce que la piscine ne sera pas construite lui procure toutefois moins de satisfaction qu'il n'en perd de par le fait que le théâtre n'est pas modernisé. Supposons également que P_2 aurait plus préféré que la piscine soit construite qu'il ne désire que le théâtre ne soit pas modernisé.

Dans cette constellation, P_1 et P_2 ne sont pas contents des résultats du vote.

Cela ouvre la voie à un marchandage entre P_1 et P_2 en vue d'améliorer leur situation aux dépens de P_3 .

En effet, P_1 et P_2 peuvent former une coalition en ce sens que P_1 s'engage à voter oui à la construction de la piscine et P_2 s'engage à voter oui à la modernisation du théâtre.

Ce phénomène est appelé « logrolling » ou « vote trading ». En échange d'un oui à la modernisation du théâtre P_2 obtient un oui de la part de P_1 à la construction de la piscine et vice versa.

Donc dans le premier cas P_1 vote oui à quelque chose qu'il n'apprécie pas mais qu'apprécie P_2 . Mais cela il le fait parce qu'en échange P_2 , sans en être demandeur de son côté, vote oui à quelque chose que P_1 désire.

Le résultat ne sera plus que ni la piscine n'est construite ni le théâtre modernisé, mais que les deux projets sont réalisés.

On a supposé que P_3 soit et reste contre tout projet. Si de plus P_3 était flexible c'est-à-dire si ces deux « *non* » étaient à intensité variable, d'autres constellations de coalition auraient été possibles.

Notons pour terminer que l'on peut s'interroger si le « *logrolling* »¹ est une bonne ou mauvaise chose. Répondre à cette question est chose assez difficile.

Limitons-nous à constater que dans l'exemple ci-dessus, le résultat final est que suite au marchandage deux biens publics sont mis en place au lieu d'aucun. Cela, toutes autres choses égales, augmente bien évidemment les dépenses publiques et, partant, également le besoin de financement de l'Etat. Ce constat amène d'aucuns à conclure que le « *logrolling* » peut être à l'origine de dépenses publiques excessives.

D'autres, par contre, estiment qu'il permet des décisions plus près des préférences des parties, voire des électeurs dans la mesure où il permet, indirectement, d'inclure les intensités des préférences dans le processus de la décision qui partant se trouve affiné par rapport à une simple décision binaire entre « *oui* » ou « *non* » (« *tout ou rien* »). Dans cet ordre d'idées, il est également souligné que le *logrolling* est un des (quasi-)mécanismes institutionnels qui, en pratique, permettent de dépasser les constats théoriques du type McKelvey quant à l'indétermination et à l'instabilité des règles de vote, notamment majoritaires.

4.10. Le théorème d'impossibilité d'Arrow et remarques finales

Nous avons vu qu'il existe des profils des préférences, si on leur applique différentes méthodes de vote, alors ces différentes méthodes de vote aboutissent à des résultats différents quant au projet qui se classe premier.

Ce constat relève de l'analyse positive. On a pris différentes méthodes de vote, les a appliquées à différents profils des préférences et a conclu que pour certains de ces profils, différentes méthodes de vote ne dégagent pas le même résultat.

D'autres constats positifs peuvent être dérivés de ce constat de base, p.ex. que le choix de la méthode de vote n'est pas forcément neutre au sens qu'il est possible que ce choix importe parfois plus pour le résultat final que la structure des préférences individuelles par rapport aux projets au choix.

On peut faire un pas de plus et s'interroger si ce constat de base de la possibilité que différentes méthodes appliquées à un et à un même profil ne donnant pas toutes le même résultat n'est pas finalement un « *faux problème* » tout simplement parce qu'il existerait une méthode de vote idéale qui donnerait toujours le « *bon* » résultat.

¹ « You scratch my back, I scratch yours. »

Poser cette question, c'est poser une question qui passe par une considération normative, à savoir la précision de ce que l'on entend par « *méthode de vote donnant toujours le bon résultat* », c'est-à-dire la définition de critères de caractéristiques, de conditions que l'on considère comme constitutifs d'une méthode de vote idéale.

Or, il n'existe pas de réponse unanimement partagée quant à ce qui constitue une méthode de vote idéale.

Rappelons notre analyse comparative des méthodes de Borda et de Condorcet. Si pour certains profils ces deux méthodes donnent le même résultat (soit le même projet gagnant, soit aucun projet gagnant), pour d'autres profils, elles dégagent des résultats différents.

On a vu que ce dernier fait tenait aux différences entre ces deux méthodes, à savoir le nombre de votes par projet que chaque votant pouvait émettre, la façon dont l'émission du vote a été déterminée et le critère déterminant le projet retenu.

A ce stade, il y a lieu de mentionner un résultat très fameux de la science économique, que l'on intitule le théorème d'impossibilité d'Arrow, dû précisément à l'économiste américain Kenneth Arrow et qui lui a valu le prix Nobel d'économie en 1972.

Arrow a renversé quelque peu l'approche. Au lieu de concevoir différentes méthodes d'agrégation, de classement, de vote et de développer chaque fois une succession d'exemple, chaque nouvelle problématique découverte ainsi suscitant de nouveaux développements, il a défini, postulé départ certaines caractéristiques considérées, jugées comme « *fondamentales* », « *raisonnables* », « *indispensables* », caractéristiques qu'il a appelées, dans un saut épistémologique quelque peu héroïque, axiomes pour chercher quelles méthodes les satisfont.¹

Donc, Arrow a énoncé un certain nombre de conditions minimalistes qu'il a jugées très raisonnables et que devrait selon lui satisfaire une méthode de vote visant à dégager un classement collectif à partir et sur la base des classements individuels des votants.

¹ cf. notre section 4.6.

Pour le dire avec les mots d'Arrow : « *We have now imposed five apparently reasonable conditions on the construction of a social welfare function. These conditions are, of course, value judgments and could be called into question ; taken together they express the doctrines of citizens' sovereignty and rationality in a very general form, with the citizens being allowed to have a wide range of values.* »^{1, 2}

Ensuite, Arrow s'est posé la question s'il existe une méthode de vote qui en toutes circonstances, c'est-à-dire principalement pour tous les profils des préférences imaginables, dégagera toujours un résultat qui satisferait simultanément ces cinq conditions.

La réponse d'Arrow, dégagée par un processus de déduction logique qui dépasse ce cours³, a été que tel n'est pas le cas. Il n'existe pas de procédure de vote, voire en général de procédure de classement collectif, susceptible de respecter en toutes circonstances simultanément ces cinq conditions.

Quelle que soit la règle de vote, c'est-à-dire de classement collectif, il est toujours possible de trouver des profils des préférences pour lesquelles la règle en question conduit à une incohérence. Autrement dit, pour chaque méthode de vote, on peut toujours trouver au moins un profil des préférences qui est tel que si l'on y applique cette méthode de vote, il se

¹ Les conditions d'Arrow, qu'une méthode de vote (l'on peut, abstraction faite de nuances techniques, considérer que chaque « *social welfare function* » donne lieu à une « *social choice procedure* » dont le vote est la procédure la plus répandue) devrait simultanément respecter, sont les suivantes :

- (i) la méthode s'applique à toutes les éventualités possibles de profil de préférences (hypothèse du domaine universel)
- (ii) le classement collectif doit être transitif ;
- (iii) il doit être compatible avec le critère de Pareto au sens que si un état réalisable est préféré par tous les agents à un autre état quelconque, alors ce premier état doit également être préféré au niveau des classements collectifs ;
- (iv) le classement collectif entre deux éventualités ne dépend que des préférences individuelles quant à ces mêmes deux éventualités et, partant, est indépendant des préférences individuelles quant aux autres projets (conditionnalité de l'indépendance des alternatives non pertinentes). Si certains votants changent d'avis, mais non pas en ce qui concerne leurs préférences relatives entre deux projets x et y, alors la méthode de vote doit toujours classer au niveau collectif de la même façon les projets x et y. (cf. précédemment où nous avons montré que la méthode de la majorité simple ni celle de Borda ne satisfont (tout comme d'ailleurs la méthode de Condorcet) cette condition). Cette condition joue un rôle très important pour le résultat d'impossibilité d'Arrow tout en étant également la plus « *controversée* ».
- (v) il n'y a aucune personne dont le classement personnel individuel pour tous les profils des préférences finira par être le classement collectif (absence de dictateur).

Arrow conclut qu'aucune méthode satisfait simultanément ces cinq conditions. On aurait pu parler aussi du théorème d'existence : « *il n'existe pas de méthode qui ne viole pas au moins un de ces cinq axiomes.* »

² cf. le livre de Kenneth Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Cowles Foundation, 1951.
Serge-Christophe Kolm dans sa *Philosophie de l'Economie*, Edition du Seuil, 1986 – un livre excellent qui vaut lecture – note que « *Choix Social et Valeurs individuelles est l'un des ouvrages de sciences sociales les plus célèbres de ce siècle. Trouvant son cœur logique dans le travail effectué par Condorcet plus d'un siècle et demi auparavant pour comprendre la tâche des assemblées constituantes révolutionnaires françaises et sa problématique dans l'Economie normative développée depuis la même époque de l'utilitarisme à la « fonction d'utilité collective » d'Oskar Lange et Abraham Bergson, Kenneth Arrow publie son étude en 1951. Elle fonde un domaine de recherche, le choix social, qui a produit une vaste littérature à laquelle contribuent, indistincts économistes, philosophes et politologues. Le sens social de ces travaux a donné lieu à des discussions. Mais celles-ci ont tout été partielles, et elles ont oublié les points principaux. Il est temps d'y remédier...* »

³ L'analyse d'Arrow procède, selon la méthode de la réduction à l'absurde.
Il suppose que les conditions soient toutes remplies et puis démontre que cela aboutirait, pour toute méthode de vote, à une contradiction théorique.

dégage un résultat qui ne satisfait pas à au moins une de ces cinq conditions.¹

Dans la mesure où une de ces conditions est l'absence d'un dictateur, donc où pour un profil des préférences donnée, on aurait qu'il existe une personne dont les préférences individuelles détermineraient l'ordre collectif, on présente souvent le théorème d'Arrow comme disant que « *Les seules procédures qui respectent les conditions de base à satisfaire violent la condition de l'absence d'un dictateur, donc sont dictatoriales* ». ²

Arrow a appelé ce résultat le théorème de l'impossibilité³. On aurait pu également parler du théorème de la possibilité ou de l'existence en disant qu'il existe des méthodes permettant d'agrèger les préférences individuelles à la condition de ne pas respecter au moins un des axiomes de base en question. Beaucoup est dans les choix sémantiques.

Un deuxième résultat fameux et, en quelque sorte, un corollaire du théorème d'Arrow, à savoir le théorème de Gibbard-Satterthwaite (que l'on a déjà rencontré supra), constitue en quelque sorte une synthèse entre la théorie des jeux⁴ et la théorie du choix social.

Gibbard et Satterthwaite, indépendamment l'un de l'autre⁵, ont montré qu'il n'existe aucune procédure de vote, à moins qu'elle ne soit dictatoriale, qui ne soit à l'abri de votes stratégiques, donc qui est à l'abri de votes non sincères par les votants.⁶

Notons bien que le théorème d'Arrow ne dit pas que pour n'importe quelle méthode de vote, les conditions ne sont jamais remplies. Il dit que pour chaque méthode de vote, il peut y avoir des profils de préférences pour lesquels tel est le cas.

De même, le théorème de Gibbard ne dit pas qu'il y aura toujours vote stratégique, mais seulement que quelle que soit la méthode de vote, il peut

¹ L'astrophysicien John Barrow dans son livre fort intéressant *The Limits of Science and the Science of Limits*, Oxford University Press, 1998, a conclu en relation avec le théorème d'impossibilité d'Arrow : « *Curiously, the trend towards a future in which individual choices might be summed almost instantaneously to give members of democracies more choice in the way they are governed or in the products available to them, makes the future less rational in some deep way unless particular restrictions upon the chooser or their range of choices.* »

² Le résultat d'Arrow a suscité une littérature énorme par la suite, cherchant notamment à analyser en profondeur tel ou tel « axiome » d'Arrow et à analyser ce qui se passe s'il n'est pas posé ou si sont posées des variantes. Little remarque à ce sujet de façon quelque peu ironique: "Arrow's theorem attracted great interest and spawned a large literature of attempts to circumvent it (It has also spawned three Nobel prizes. Seldom have so many clever people spend so much time on a matter of so little importance...)" *The practical importance of the voting paradoxes of Arrow's theorem is also very slight.*" (I.M.D. Little, Ethics, Economics and Politics, Oxford University Press, 2002).

³ Il a parlé au début de théorème de possibilité.

⁴ cf. chapitre 3

⁵ "This remarkable theorem was discovered independently in the 1970s by the philosopher Alan Gibbard ("Manipulation of voting schemes. A general result", *Econometrica*, 1973) and the economist Mark Satterthwaite ("Strategy Progress and Arrow's conditions. Existing and correspondence theorem for voting procedures and social welfare functions", *Journal of Economic Theory*, 1975)" dans Campbell, *Incentives*, 2nd édition, Cambridge University Press, 2006.

⁶ Une autre façon, plus technique, d'exprimer ce théorème est de dire : « *S'il y a plus que deux projets au choix, chaque mécanisme de vote qui n'est pas dictatoriale est manipulable, c'est-à-dire il est toujours vrai que pour au moins un votant la révélation de ses vraies préférences n'est pas pour lui une stratégie dominante.* » Nous nous sommes inspirés pour cette formulation de Campbell, *Incentives*.

toujours y avoir des profils de préférences qui ouvrent la possibilité d'un vote stratégique.¹

Des conclusions que d'aucuns s'efforcent de tirer du théorème d'Arrow du type 'La démocratie n'est pas possible' sont donc tout simplement erronées.

Ceci est d'autant plus vrai que certaines conditions « *imposées* » au départ par Arrow sous certains égards sont trop exigeantes parce que représentant la réalité de façon plus abstraite et ouverte en termes d'hétérogénéité des préférences que souvent elle ne l'est. Ce dernier point est bien illustré p.ex. par l'exemple de la section 4.4.4.6 ou par le théorème de l'électeur médian de Duncan Black exposé précédemment.²

Avant de terminer par quelques remarques de conclusion, considérons encore les citations ci-après de William Vickrey, prix Nobel d'économie en 1996, d'Edmund Phelps, prix Nobel d'économie en 2006, de William Riker³, un politologue très influent, de Kenneth Arrow, lui-même, d'Amartya Sen, prix Nobel d'économie en 1998, de Donald Saari, de Pierre Favre, de Robert Cooter, de Joachim Weimann, de Nicolas Tideman, de Gerry Mackie, de Winston Churchill et de Partha Dasgupta.

Le choix de ces citations ne relève pas d'un hasard. Elles illustrent le fait que bien des chercheurs ont réfléchi (profondément) sur la problématique. Elles reflètent également le fait que si déjà il n'a pas été évident d'aboutir à une analyse positive partagée, elles illustrent, par ailleurs, le fait que souvent, il est passé dans une étape quelque peu héroïque, d'une analyse positive, complexe à saisir intuitivement à des conclusions normatives, souvent contraires, voire même contradictoires.

Finalement, notons que si déjà nous avons dû procéder à un choix des citations à retenir, l'ordre de présentation de ces citations n'est (certainement) pas neutre :

- « *Problems of social choice will not vanish merely because the tools available to handle them are declared to be imperfect. The normative logic of social choice, though it yields by itself no formal answer, does provide guidance as to lessons along which answers may faithfully be*

¹ Strictement parlant, le théorème d'Arrow a trait à l'existence d'une social welfare function, c'est-à-dire à l'existence d'une fonction ordonnant au niveau collectif tous les projets tandis que le théorème de Gibbard-Satterthwaite a trait à l'existence d'une social choice function, c'est-à-dire d'un mécanisme qui permet de dégager parmi tous les projets le meilleur de ceux-ci sans nécessairement se soucier de l'ordre des projets restants.

² Donald Saari a remarqué au sujet du résultat d'Arrow, *Chaotic Elections*, AMS, 2001, p. 30 :
"Sounds discouraging. However, it is not. Instead there are... explanations of this theorem which allow for more comfortable conclusions. Also, when a mathematician encounters a result stating that "all procedures" suffer, the natural instinct is to discover a distinction among them; for instance, which procedures are "less likely" to suffer these problems?"

Mackie note de façon pertinente:

"A more boring but in my view more appropriate way of stating the Arrow result is to say that if we are required to consider only individuals' rankings of pairs when the collective choice is over more than two alternatives, or if we must assume that there is no correlation among different individuals' preference orderings, then there may be a cycle in the social choice." (Democracy defended, Cambridge University Press, 2003, p. 82).

³ William Riker (1920-1993) a été un des « *political scientist* » les plus influents du 20^{ième} siècle (cf. Nurmi).

thought. » (William Vickrey, « Utility, Strategy and Social Choice », Quarterly Journal of Economics, 1960).

- “Committees, legislatures, groups are famous for being unable to make up their collective minds, because they haven’t any.” (Edmond Phelps, *Political Economy*, Norton, 1985).
- “The essence of the liberal interpretation voting is the notion that voting permits the rejection of candidates or officials who have offended so many voters that they cannot win the election. This is, of course, a negative ideal. It does not require that voting produce a clear, consistent, meaningful statement of the popular will. It requires only that voting produce a decisive result that this official or this party is retained in office or rejected. This very restricted expectation about voting can, I believe, easily coexist with all defects we have observed in the voting mechanism. If so then liberalism services...

*The kind of democracy that thus survives is not, however, popular rule but rather an intermittent, sometimes random, even perverse popular veto. Social choice theory focuses us to recognize that the people cannot rule as a corporate body in the way that populists suppose. Instead, officials rule, and they do not represent some indefinable popular will. Hence they can easily be tyrants, either in their own names or in the name of some putative imaginary majority. Liberal democracy is simply the veto by which it is sometimes possible to restrain official tyranny. So the literal interpretation of voting, however much it admits of “unfair” voting methods, manipulation, cycles and the like, still contains the essential elements of democracy. It may, from the populist view, be a minimal kind of democracy, but this is the only kind of democracy actually attainable....” (William Riker, *Liberalism against Populism*, Waveland Press, 1982).*

- A la question “If non dictatorial social choice mechanisms are more prone to indecision (cycling) and poor decision-making (chaos) than dictatorial systems, why are democracies so commonplace these days?” Arrow a répondu comme suit:

“One aspect of political decision-making that I didn’t consider in my approach to social choice theory is that the political process includes communication, not just decision-making. Information is critical. Hence the recent emphasis in deliberation democracy is important. Yet it seems that even after an intense deliberation phase, inconceivable differences will remain. Indeed, deliberation may make differences of opinion clearer...

I would not assume that the current prevalence of democracy is permanent. Many democracies have ceased to be. Indeed, several, such as Germany in 1933, have made a conscious choice to set aside democracy. Venezuela has made a somewhat similar move, and other Latin American democracies are very shaky. Even in the stablest democracies, the United States and several countries of Europe, there is a mismatch between issues in the political area and the actual concerns of the voters. The rejections of the European Union Constitution in France and the Netherlands, against the unanimous

*views of the political elites, are one example. In the United States, observers have noted that the partisan divisions in elections and in the legislatures are more extreme than the actual views of the electorates. One symptom of the discontent is low participation in voting.” (Kenneth Arrow, “Questions about a Paradox”, chapter 54, in *The Oxford Handbook of Political Economy*, Oxford University Press, 2006).*

- *« One way of interpreting the various impossibilities » results is to say that there is no « ideal » system of collective choice that works well in every society and for every configuration of individual preferences (as proposed by the use of the condition of « unrestricted domain » employed in virtually all the impossibility theorems). Some choice procedures work very well for some types of choice and some sets of individual preferences work and not for others and naturally our evaluation of these procedures must depend on the type of society for which they must be considered. There is nothing outstanding defeatist in this modest recognition. » (Amartya Sen, *Collective choice and social welfare*, 1979, North-Holland).*
- *“The jist of [all those well-known impossibility results, such as Arrows theorem] is that we cannot do what we may want to do when designing voting rules. Is this true? The conclusions stated by these eminent authors are, of course, correct. But, as I will explain, their interpretations can be misleading. The central difficulty is that explicitly stated information that we believe is being used, is not. Once we understand why these conclusions arise, it is easy to sign benign interpretations for many of them and, of great importance, to discover positive conclusions.” (Donald Saari, *Disposing dictators, Demystifying Voting Paradoxes*, Cambridge University Press, 2008).*
- *« Il faut ... très précisément définir la portée du théorème d'impossibilité d'Arrow: il serait en effet erroné de croire qu'il faut à jamais renoncer à toute décision démocratique, car aucune ne serait transitive, c.-à-d. cohérente. En réalité, le théorème d'impossibilité implique simplement que si, parfois, un ordre de préférence collectif sera en même temps issu des préférences individuelles (donc démocratique) et rationnel, et dans d'autres cas, il ne sera pas possible de parcourir à une décision collective satisfaisante. Autrement dit, il n'y a pas d'impossibilité de faire surgir un ordre rationnel unique d'une pluralité d'ordres individuels, mais il y a impossibilité de trouver une règle qui fonctionne sans défaillance dans tous les cas. » (Pierre Favre, *La décision de majorité*, Presse de la Fondation nationale des Sciences politiques, 1976, p. 66)*
- *“The modern state possesses many monopoly powers, including the power to make law and collect taxes. In a democracy, popular elections direct stable powers, either directly through referendum or indirectly through elected officials. Democracy is thus a system of popular competition for directing the state's monopoly powers. The scope and breath of political competition distinguishes democracy from other form of Government.*

Competitive elections make governments respond to citizens much like competitive markets make the economy respond to consumers. I

believe that electoral competition is the best guarantee that the state will give citizens the laws and public goods that they prefer. This belief plus the definition of democracy as popular competition for directing the state's monopoly powers, implies that democracy is the best form of government for satisfying the political preferences of citizens." (Robert Cooter, *The Strategic Constitution*, Princeton University Press, 2000, p. 4).

- *„Letztlich läuft die Frage der Akzeptanz zyklischer Mehrheiten – oder allgemeiner Intransitivitäten – auf eine Entscheidung zwischen zwei normativen Positionen hinaus. Wollen wir, dass Entscheidungen grundsätzlich nicht zufällig getroffen werden, dass die Gesellschaft in jeder Situation entscheidungsfähig ist, oder wollen wir, dass Entscheidungen grundsätzlich fair, und das heißt manchmal eben auch durch Losentscheid getroffen werden? Wie immer bei solchen normativen Fragen ist eine eindeutige Entscheidung nicht möglich. Aber der Verweis auf Fairness-Vorstellungen könnte doch einen Weg beschreiben auf dem wir zwar nicht um das Arrow-Paradoxon herumkommen, der uns aber die Möglichkeit eröffnet, mit ihm zu leben, ohne unsere Entscheidungsfähigkeit als Katastrophe empfinden zu müssen.“* (Joachim Weimann, *Wirtschaftspolitik*, Springer, 2009, p. 219).
- *“To see that voting can be an attractive way to make collective decisions despite the Arrow theorem and the variation on it offered in previous section, it is only necessary to remember that voting establishes not what a collectivity should do but only what the collectivity shall do. To agree to coordinate their intentions through voting, it is not necessary that the members of a collectivity believe that voting identifies the available option that is indisputably best; it is only necessary that they believe that the overall pattern of outcomes that will result from their agreeing that a prescribed set of collective decisions will be made by voting will be better (in terms of whatever combination of selfish and altruistic concerns each individual has) than if they do not agree to make such decisions by voting.*

In this context, the role of the known theorem and the variation on it is to warn that there is a limit to what can be expected of any voting procedure. If an [voting rule] is to satisfy the [Arrow condition] then choice consisting cannot be achieved. The outcomes chosen from different sets of available options, on the basis of any given [voting rule] and given sequence of rankings of all the options will not necessarily be consistent with one another. But this should not be surprising. It should be expected that voting will entail making choices over pairs of options on the basis of majority rule. And when there is a cycle, any way of identifying a winning option will be inconsistent with majority rule for some pair...

One possible explanation of the intense interest in the Arrow theorem is that this interest reflects a concern for justifying the coercion that democratic societies employ in seeking to motivate their citizens to abide by their rules. People would like a basis for saying: “Now that we have voted we know the right thing to do; even if you disagree, you

*have an obligation to do what we all now know to be the right thing. We will tolerate no uncooperativeness.” Some people may have thought that the virtues of appropriate [voting rules] provided a basis for such an assertion. Thus the Arrow theorem may leave these people in shocked disbelief. A person who believes that voting can identify the indisputably correct course of action and is concerned about the defensibility of his or her beliefs is required by the Arrow theorem to do some serious re-thinking of political philosophy.” (Nicolas Tideman, *Collective Decisions and Voting*, Ashgate, 2006, p. 140).*

- *“The proposition that democratic voting is arbitrary and meaningless can be used not only to justify a constitutional liberalism such as Riker’s, it can also be used to justify a dictatorship that appeals to the values of stability and order. The irrationalist doctrine is taught in America’s leading political science departments, law schools and economics departments. Students absorb these teachings and then move on to join the political and economic elites of the world. I shudder to think of the policies demanded in the international consultancies and financial agencies and the national treasury departments of the world by people who were taught the findings of Arrow as interpreted and expanded by Riker’s school of thought... [This] new academic attack on democracy fails, theoretically and empirically. The nationalist interpretation of the Arrow theorem and associated social choice results is one of the bigger intellectual errors of the second half of the twentieth century. Its long, dark shadow over democratic politics is now lifting. Democracy is on the march on the world today...” (Gerry Mackie, *Democracy Defended*, Cambridge, 2003¹, p. 4 et p. 443).*
- *“Many forms of Government have been tried, and will be tried in this world of sin and woe. No one pretends that democracy is perfect or all-wise. Indeed, it has been said that democracy is the worst form of Government except all those other forms that have been tried from time to time.”² (Winston Churchill, in a 1947 House of Commons Speech)*
- *“The [Arrow impossibility theorem] is both deep and depressive... It seems to me, we simply have to live with Arrow’s theorem and do the best we can... Just as circles can’t be squared, ideal voting rules don’t exist, ideal markets are pleasant myths and ideal government can’t be conjured up because governments are run by people. If all this feels overly depressing, let us acknowledge that the human losses we see round us aren’t due to any of these analytical difficulties. Stunted and wasted lives aren’t caused by the ‘impossible theorem’. They happen because people have yet to learn how to live with one another.” (Partha Dasgupta, *Economics. A very short Introduction*. Oxford University Press, 2007, p. 157).*

Un des apports clés du théorème d’Arrow est de nous sensibiliser pour le fait que les méthodes de choix social, en général, et de vote, en particulier, sont une chose complexe au point qu’elles peuvent faire l’objet de résultats non attendus, voire paradoxales et que l’on ne peut pas considérer que la

¹ En 2011, on suit avec grand intérêt les évolutions en Tunisie, en Egypte et ailleurs.

² Y en a-t-il qui ne furent pas encore essayées ?

rationalité individuelle se reproduise ou puisse s'agréger telle qu'elle dans une rationalité collective.¹

Ceci dit², nous estimons toutefois que l'expérience nous montre que d'une façon ou l'autre on finit par aboutir le plus souvent à des décisions, ce qui peut s'expliquer par le fait qu'il y a des convergences suffisamment fortes entre les préférences individuelles pour permettre des résultats qui, sans satisfaire nécessairement à une cohérence totale et qui même auraient pu être différents si l'agenda avait été différent ou si d'éventuels votes stratégiques s'étaient déclinés différemment, finissent par s'avérer toutefois suffisamment cohérentes pour être plus ou moins acceptables et maintenir en règle générale une stabilité suffisante du système. Cela est d'autant plus vrai que les préférences individuelles sont relativement homogènes et/ou que la volonté dans un esprit pragmatique et d'auto-préservation, est suffisamment prononcée pour accepter un résultat trouvé³, pour autant que ce dernier soit la résultante d'une procédure qui, ex ante, n'est pas fondamentalement contestable et contestée, c.-à-d. pour autant qu'il existe un « *consensus* » procédural, y compris les problématiques de « *l'agenda setting* », comportant l'acceptation ex ante du résultat qui sortira ex post.⁴

Si donc, au deuxième degré, il ne faut jamais prendre la démocratie comme garantie, comme allant de soi et dans ce contexte, il importe de ne pas perdre de vue, au premier degré, qu'une démocratie et ses institutions peuvent bien ou mal fonctionner et, que souvent, la pérennité du système démocratique dépend fortement de la qualité du fonctionnement démocratique d'aujourd'hui.⁵

¹ Nous n'allons pas aborder une critique du théorème d'Arrow qui consiste à noter qu'il ne s'applique qu'à des ranked voting et non pas à des scoring systems (« *range voting* »).

² Voir également l'excellent livre de Donald Saari, *Decisions and Elections*, Cambridge University Press, 2001.

³ Ceteris paribus, tel est le cas plus un pays est petit et, ceteris paribus, tel est le cas plus les préférences sont proches, sur les questions religieuses, politiques, idéologiques, économiques. Un très grand pays (organisé de façon plus ou moins centralisé) avec une forte diversité de préférences est démocratiquement moins stable qu'un petit pays avec des préférences relativement peu hétérogènes.

⁴ Quelqu'un a résumé cela, de façon un peu cynique, en disant que ce qui importe est que l'on trouve un compromis qui est suffisamment bête ou flou pour ne pas être contesté.

⁵ Un message à méditer. Et n'oublions pas qu'un seul recours au processus démocratique du vote a suffi à Hitler, c'était en effet la première et dernière fois.

5. Démocratie représentative. Comment fixer le nombre de sièges dans un Parlement, le nombre de circonscriptions électorales et la fixation et l'allocation des sièges de chaque circonscription aux différents partis politiques

6. Comparaison à la lumière de la théorie des choix sociaux de la démocratie directe et de la démocratie représentative

Exercices

1. (i) Arrow commence son livre *Social Choice and Individual Values* - qui lui a valu le prix Nobel d'économie - par la phrase suivante: "*In a capitalist democracy there are essentially two methods by which social choices can be made: voting, typically used to make "political" decisions and the market mechanism, typically used to make "economic decisions"*".

Commentez cette affirmation.

- (ii) Commentez l'extrait suivant repris de John Bonner, *Politics, Economics and Welfare* :

"[Markets] generate social choices ; and in so doing offend against the condition of collective rationality. This may be illustrated by what is known to economists as the non-uniqueness of competitive equilibrium, and has much to do with changes in the distribution of income, and with intransitive social ordering. Individuals have preferences between, among other things, commodities they would like to consume. On markets they "vote" for them by offering money income in exchange. Each individual has as many 'votes' as his total income or claims or resources permit. Changes in the distribution of income with the same set of individual preferences, will alter the 'votes' or 'offers' of identical individuals. The poor do not buy the same things as they would if they were rich."

2. Soit une société composée de deux groupes d'individus de nombre égal dont les préférences par rapport à deux projets sont :

Groupe I	A	B
Groupe II	B	A

- (i) Montrez qu'il n'existe aucune méthode de vote raisonnable qui permet de départager ces deux projets.
- (ii) Supposez qu'il apparaisse un troisième projet C qui fait que les préférences se présentent maintenant comme suit :

Groupe I	A	C	B
Groupe II	B	C	A

Montrez que ni la méthode de la majorité simple ni celles de Condorcet et de Borda départagent les trois projets.

Nonobstant ce constat, n'y aurait-il pas d'arguments plaidant pour le choix de C ?

Dans ce contexte, complétez la méthode de Borda en définissant le Borda winner comme celui qui reçoit le plus de votes et, dans le cas, où il y a plus d'un projet qui a le nombre de votes le plus

élevé, comme le projet où la dispersion des votes reçus est la moins élevée.

3. Soient trois projets x y z .

Supposons que quelqu'un ait les préférences suivantes :

- devant le choix entre la paire x et y , il préfère x ;
- devant le choix entre la paire y et z , il préfère y ;
- devant le choix entre la paire x et z , il est indifférent entre x et z .

(i) Cet ordre est-il transitif ?

(ii) Est-il quasi transitif ?

(iii) Est-il acyclique ?

(iv) Que penser du raisonnement suivant :

« Si le choix est entre (x,y) , on choisit x , s'il est entre (y,z) , on choisit y , s'il est entre (x,z) , on peut choisir indifféremment x ou z et si le choix est entre (x,y,z) , on choisit x puisque c'est le seul projet qui est au moins aussi bien que toutes les autres. Donc, on peut toujours choisir, peu importe le menu des projets proposés. » (cf. pour cet exercice Sen, *Collective Choice and Social Welfare*).

4. Soient quatre projets x_1 , x_2 , x_3 et x_4 .

Supposons qu'on ait :

- $x_1 > x_2$
- $x_1 \sim x_3$
- $x_1 < x_4$
- $x_2 > x_3$
- $x_2 \sim x_4$
- $x_3 > x_4$

Montrez qu'aucun triplet de projets n'est acyclique mais que tel est le cas pour les quatre projets pris dans leur ensemble. (cf. Sen, *Collective Choice and Social welfare*).

5. (i) Comparez les définitions suivantes de l'unanimité :

- (a) chacun est pour ;
- (b) personne n'est contre ;
- (c) personne n'est contre et au moins une personne est pour.

(ii) Analysez les cas suivants :

- Le pont est construit si chacun est pour la construction.
- Le pont est construit si personne n'est contre la construction.

- Le pont n'est pas construit si une personne est contre la construction.
 - Le pont n'est pas construit si chacun est contre la construction.
6. Soit un groupe de 100 personnes. Il s'agit de choisir un Président. Il y a deux candidats A et B. Le choix doit se faire par un vote à la majorité.
- (i) Importe-t-il que la méthode de vote soit le vote à la majorité simple (pluralité) ou à la majorité absolue ?
 - (ii) En quoi la problématique du traitement des votes blancs et des votes nuls importe-t-elle ? Y a-t-il une distinction entre abstention et vote blanc ?
 - (iii) Analysez le cas où sur le bulletin de vote il y a trois cases dont il faut cocher une et qui sont intitulées comme suit : 1. candidat A, 2. candidat B, 3. abstention.
 - (iv) A la lumière des développements ci-dessus, précisez les concepts de :
 - votes exprimés
 - vote blanc
 - vote nul
 - (vote) abstentionde :
 - préférence
 - préférence stricte
 - indifférencede :
 - votants présents
 - votants représentés

7. Analysez les profils ci-après :

(i)

x	y	z	t
z	x	t	y
t	x	y	z
x	y	z	t

(ii)

x	y	t	z
y	z	x	t
z	x	t	y

(iii)

t	x	y	z
x	y	z	t
z	t	y	x

8. Supposons qu'il y ait quatre projets x, y, z et t. Soit un ordre individuel x y z t. Construisons le tableau suivant :

	x	y	z	t
x	/	•	•	•
y	/	/	•	•
z	/	/	/	•
t	/	/	/	/

Supposons que le projet x aura 6 voix, le projet y 3 voix, le projet z 1 voix et le projet t aucune voix.

Montrez de façon plus générale que cela revient à donner, en présence de n projets, $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots+1$ voix au projet le plus préféré, $(n-2)+(n-3)+\dots+1$ au deuxième projet le plus préféré, etc.

Comparez cette méthode avec la méthode de Borda.

9. (i) Commentez l'adage suivant :
- « *Ne pas choisir, c'est choisir.* »
- (ii) Commentez l'exemple horrible dans le roman *Sophie's choice*, de William Styron où une femme doit, dans un camp de concentration, décider lequel de ses deux enfants sauver. A défaut d'un choix explicite, les deux enfants seront perdus.
10. (i) Analysez l'extrait suivant de Nurmi repris de *Comparing voting systems* :

"Intuitively speaking, transitivity fails typically in cases where the criterion by which a and b are compared is not the same as that by which b and c are compared. For instance, I might prefer candidate a to candidate b in local elections because I think a has more sensible views about traffic plans in the centre of my home town. On the other hand, I might prefer candidate b to candidate c because of the former's more appealing personal appearance. But I might still prefer c to a if I thought that his attitude towards homeless people is more in line with my own views. In this case, we have more than one dimension along which the candidates are compared."

- (ii) Combien de dimensions différentes y a-t-il dans l'exemple de Nurmi?
- (iii) En faut-il autant pour la finalité recherchée ?
11. (i) Soit le profil des préférences

y	z	x
y	x	z
x	z	y

Montrez que le profil y le remporte à la méthode de Condorcet. Supposons que l'on oppose d'abord x à z et puis le gagnant à y. Que se passe-t-il ?

(ii) Soit le profil des préférences

x	y	z
y	z	x
z	x	y

Supposons que l'on oppose d'abord x à z et puis le gagnant à y. Montrez que c'est le projet y qui l'emporte. De ce seul constat, peut-on déduire quelque chose en relation avec la problématique de l'ordre collectif ?

12. (i) S'il y a 90 votants, quel pourcentage des voix un projet doit-il obtenir au moins pour le remporter à la majorité simple s'il y a trois projets en compétition ? S'il y a n projets en compétition ?

(ii) Que peut-on dire sur la méthode du vote à la majorité simple (pluralité) si le nombre de projets au choix augmente ?

13. Supposez qu'il y ait deux projets x et y et 80 votants.

Le profil des préférences est :

30	x	y
50	y	z

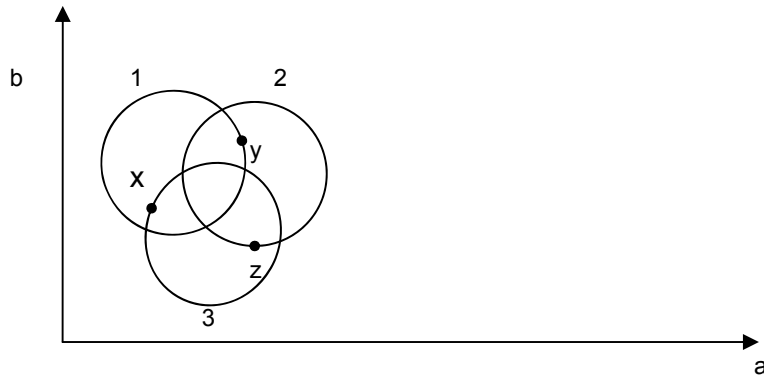
Supposez que l'on ajoute un projet y' qui est un clone du projet y en ce sens que y et y' sont quasi-identiques et vont finir par se partager les préférences.

Admettons donc que le profil devienne :

30	x	y	y'
25	y	y	z
25	y'	y	z

Que constatez-vous ? Donnez des exemples concrets illustrant cette problématique.

14. (i) Soit la constellation ci-après où nous avons les courbes d'indifférence de trois votants différents.



Les préférences individuelles des trois votants sont :

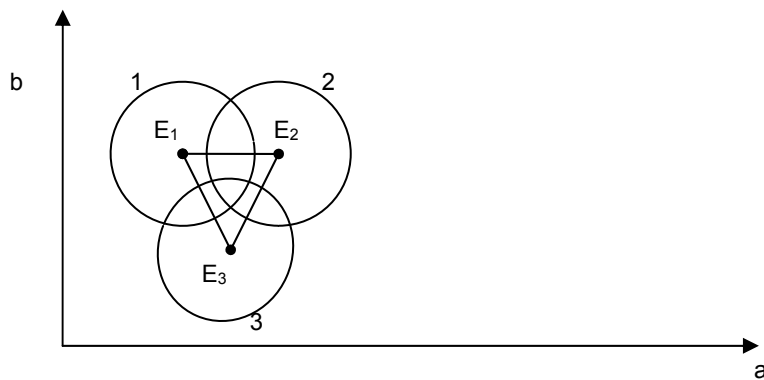
individu 1 : $x > y > z$

individu 2 : $y > z > x$

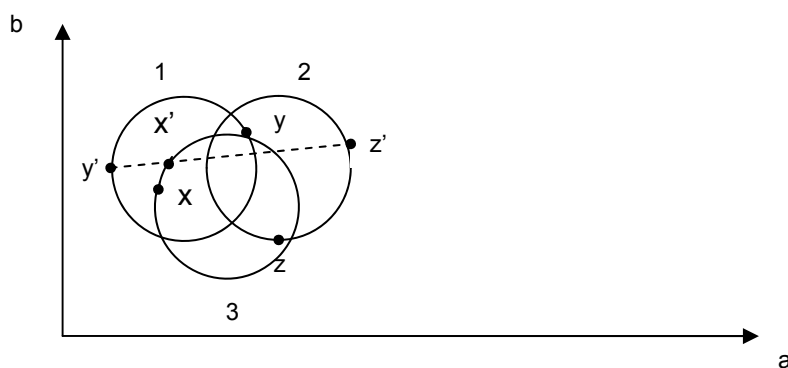
individu 3 : $z > x > y$

Montrez qu'il y a une cyclicité.

(ii) Analysez le cas suivant :



(iii) Regardons maintenant le scénario suivant où les trois projets x' , y' et z' sont situés le long d'une ligne droite.



Nous constatons que les préférences respectives sont :

individu 1 $x' y' z'$

individu 2 $z' x' y'$

individu 3 $x' y' z'$

Y a-t-il une transitivité ?

15. (i) Dans le contexte de la (des) théorie(s) des choix collectifs, discutez les concepts d'« *unanimité* » et de « *consensus* ». Existe-t-il un lien entre les deux (a) du point de vue procédure et (b) du point de vue résultat ?
- (ii) Analysez et commentez les définitions ci-dessus reprises du livre intéressant de Nicolaus Tideman, *Collective Decisions and Voting*, Ashgate, 2006 :
- “*Consensus : A collective decision is made by the mode of consensus if and only if all members of the collectivity agree that the chosen pattern of coordinated action represents what the collectivity ought to do or what they want the collectivity to do.*”
 - “*Pseudo-consensus: A collective decision is made by the mode of pseudo-consensus if and only if one or more of the members of the collectivity regard the chosen pattern of coordinated future actions as not what the collectivity ought to do and not what they desire, but all agree to coordinate their actions nevertheless, without any compensation for their agreement.*”
 - “*Discovered consensus: consensus with minimal effort.*”
 - “*Achieved consensus: consensus after noticeable effort.*”
 - “*Immediate pseudo-consensus: pseudo-consensus with minimal effort.*”
 - “*Achieved pseudo-consensus: pseudo-consensus after considerable effort.*”
16. Analysez, commentez et comparez les deux justifications statistiques que l'on peut donner pour la méthode du vote à la majorité et que Tideman présente comme suit :
- “*self-interested advocates : There is a statistical justification of majority rule in terms of the “principle of insufficient reason”. If one is trying to estimate which of two options is likely to provide greater total utility to the members of a collectivity, and if the only information that is available is the number of voters who favour each option, then there is no reason to suppose that those who favor one*

option will feel any more strongly about the matter than those who favor the other. Therefore, it is more likely that greater total utility is obtained if the option favored by the majority is adopted than if the option favored by the minority is adopted.

- *Disinterested Judges: If one views voters as disinterested, then a justification of majority rule first offered by Condorcet is possible. If every voter is regarded as equally skilful in discerning which of two options is better, and if prior to the vote one has no reason for believing that one option is more likely to be better than the other, then after the vote, it is reasonable to believe that the option favoured by the majority is more likely to be the better one.*

17. Analysez et commentez le texte ci-après repris de K. Shepsle, *Analytical Politics*, p. 35 :

“Rational choice models generally start with a well-defined set of actors ($N = \{1, 2, \dots, n\}$), a number of outcomes over which actors hold preferences ($X = \{x, y, z, \dots, n\}$), a set of behaviors or instruments with which to achieve preferred outcomes ($I = \{A, B, C, \dots\}$) and some rule which links actors’ instrumental choices to outcomes (R). For example, each of n voters may vote for A, vote for B, or abstain. A candidate wins if he or she gets more votes than any other. Thus, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $x = \{A \text{ wins, B wins, tie}\}$ and $I = \{\text{vote A, vote B, abstain}\}$. The rule R is plurality rule, implying that a vote for A (or B) increases the likelihood A (B, respectively) wins.”

18. Analysez et commentez l'extrait suivant repris de Alan Taylor, *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*, Cambridge University Press, 2005, p. 14), extrait qui a trait aux trois concepts de « social welfare function », de « social choice function » et de « voting rule » :

“In fact, when authors such as Borda, Condorcet and Dodgson give examples of different voting systems, it is often not clear within which of these contexts – voting rules, social welfare functions, or social choice functions – they are working. But this imprecision is not necessarily a bad thing. For example, the Borda count provides natural examples of the first two contexts (voting rules and social welfare function) in the following ways:

- (i) *It yields a voting rule by simply taking the set of winners to be the alternatives in A that have the highest Borda score.*
- (ii) *It yields a social welfare function by using the Borda scores of the alternatives in A to obtain a weak ordering of A.*

Interestingly, there are two natural ways that can use the Borda count to get a social choice function on A

Amartya Sen refers to these as the “narrow Borda rule” and the “broad Borda rule”.

- (3a) Given a set A , a profile P , and an agenda v , we can first restrict the ballots in P to v (erasing from the ballots all the alternatives that are not in v) and then calculate the Borda scores as usual, with the alternatives having the highest Borda scores winning.
- (3b) Given a set A , a profile P , and an agenda v , we can first calculate the Borda scores using the ballots that list all the elements of A and then choose as winners the alternatives in v whose Borda scores are highest among the alternatives in v .

Noting that in both (3a) and (3b) we are doing two things: restricting to the set v and calculating Borda scores. The difference is in the order in which we do these. In (3a), we are first restricting (the ballots) to the set v and then calculating Borda scores. In (3b), we are first calculating Borda scores and then restricting (the set of winners) to the set v ."

19. Commentez l'extrait suivant de William Poundstone, *Gaming The Vote*, Hill and Wang, 2006, p. 20 et p. 258 :

"This book asks a simple question. Is it possible to devise a fair way of voting, one immune to vote splitting? Until recently, every well-informed person would told you the answer was a most definite no. They would have cited the work of Nobel laureate economist Kenneth Arrow and his famous impossibility theorem. In 1948 Arrow devised a logical proof saying (very roughly) that no voting system is perfect. Arrow was not talking about... confusing ballot designs, lacked electronic machines or any type of outright fraud. Such problems, though serious, can be fixed. He was talking about a problem that can't be fixed. He showed that vote splitting and worse paradoxes can corrupt almost any reasonable way of voting. This led to decades of lowered expectations, if not outright despair over voting. Building a significantly better voting system seemed to be impossible. In recent years, scholars have begun to revise this pessimistic view. There are better ways to vote, including some that fall outside the impossibility theorem entirely. One of the most promising is known as range voting. In December 2000... Temple University mathematician Warren D. Smith published an extensive computer simulation study comparing the merits of voting methods. He showed that range voting achieves the greatest overall voter satisfaction, by a large margin, of any widely proposed system. No less important, it stands up better than any other system to attempts to manipulate the vote.

You are already familiar with range voting. It is used in many Internet "polls" and consumer surveys. We use range voting for rating movies, restaurants, athletes, eBay vendors – "everywhere", adds the economist Claude Hillinger, "except where it would matter most, in political elections." That generations of voting theorists had overlooked a practical idea ingrained in popular culture is one of the odder tales in recent scientific and political thought...

The profession dealing with collective choice is just about completely dysfunctional," Hillinger said, "from the point of view dealing with the social problem that they are ostensibly dealing with". That "racial problem" is of course making our elections fair. To have any chance of

solving the problem it is necessary to recognize the gaping chasm between what Arrow's theorem says and what people thought it meant. The impossibility theorem is poised on the knife's edge of truth. Frame the problem exactly the way Arrow did, and national democracy is "impossible". Drop the obsession with ranking, and life becomes a lot easier. So what does the impossibility theorem mean? Smith and Hillinger's answer could hardly be more different from the pessimistic interpretations that have prevailed. The message of the impossibility theorem is: don't use ranked voting system.

There is an open door to social choice, Hillinger says, "and another one that is closed. One would have expected choice theorists to pass through the open door: they chose instead to bang their heads against the closed one."

Notez que le "range voting" fonctionne comme suit. Il y a une échelle p.ex. de 1 à 5 points. Pour chaque candidat, vous devez lui attribuer un score, entre 1 et précisément 5 qui est le score le plus élevé. Chaque votant procède de la sorte et le candidat qui l'emporte est celui qui a le score le plus élevé.

20. Analysez l'affirmation suivante au sujet du point median:

- "- If the number of voters N is odd, then the median is always unique. This is true even if ideal points are shared.*
- If N is even and no ideal point is shared, there is a closed interval of medians.*
- If N is even and some ideal points are shared, then there may be either a unique median or a closed interval of medians."*

(Hinich and Munger, Analytical Politics, p. 35).

21. Analysez et commentez les extraits suivants de Alan Taylor, *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*, Cambridge University Press:

- (i) *"... consider an election in which there are three or more candidates from which a unique winner must be chosen, and in which each voter casts a ballot that gives his or her ranking of the candidates from the best to worst with no ties. Can one, in this situation, devise a voting procedure such that each candidate wins at least one hypothetical election and with which no voter can ever gain by unilaterally changing his or her ballot?"*

As stated, this turns out to be a trivial question. If there are n voters, then a moment's reflection reveals n such voting procedures, each obtained by fixing one of the voters and taking the winner to be his or her top-ranked candidate. Dismissing these – they are, after all, dictatorships – leaves a better question. Are there any others? The answer, quite remarkably, is no. This is precisely what the Gibbard-Satterthwaite theorem of the early 1970s asserts... That theorem is related to – indeed some would

say equivalent to – the celebrated 1950 result known as Arrow's impossibility theorem.”

- (ii) “In particular, theorem like those of Arrow and of Gibbard and Satterthwaite apply on an “(A,n)-by-(A,n) basis”. That is, they are no assertions of the form: “If V is a voting rule that satisfies certain conditions for every A and every n then certain conclusions hold for ‘every A and every n’. Rather, they say: “If V is a voting rule that satisfies certain conditions for some A and some n, then certain conclusions hold for that particular A and that particular n.”

22. Commentez l'affirmation suivante :

« Ce qui est est et tout changement requiert l'unanimité. »

23. Commentez l'affirmation suivante :

“... social choice theorists have pointed out that democratic means (wider spread participation and shared power) and democratic ends (the existence of a coherent “will of the people”) may be inconsistent.” (Hinich and Munger, *Analytical politics*, Cambridge University Press, 1997, p. 18).

24. (i) « Pour qu'un projet soit un Borda winner, il doit dans au moins un profil des préférences occuper le premier rang. » Vrai ou faux ?
- (ii) « S'il y a cyclicité, il n'existe ni de Condorcet winner, ni de Borda winner. » Vrai ou faux ?
- (iii) « Le Borda winner n'est jamais un Condorcet loser. » Vrai ou faux ?
- (iv) « Le Condorcet winner est toujours le Borda winner ». Vrai ou faux ?
- (v) « S'il y a non-transitivité au niveau collectif, il n'y a pas de Condorcet winner. » Vrai ou faux ?
- (vi) « Un Borda loser peut être un Condorcet winner. » Vrai ou faux ?
- (vii) « Un Condorcet loser peut être un Borda winner. » Vrai ou faux ?
- (viii) « La non-transitivité implique qu'il y ait un potentiel d'agenda setting. » Vrai ou faux ?
- (ix) « La cyclicité implique la non-transitivité, mais pas l'inverse. » Vrai ou faux ?
- (x) « Il n'y a pas de Borda winner si et seulement si il y a cyclicité. » Vrai ou faux ?

(xi) « Pour qu'il y ait un problème d'agenda setting, il faut qu'il y ait cyclicité. » Vrai ou faux ?

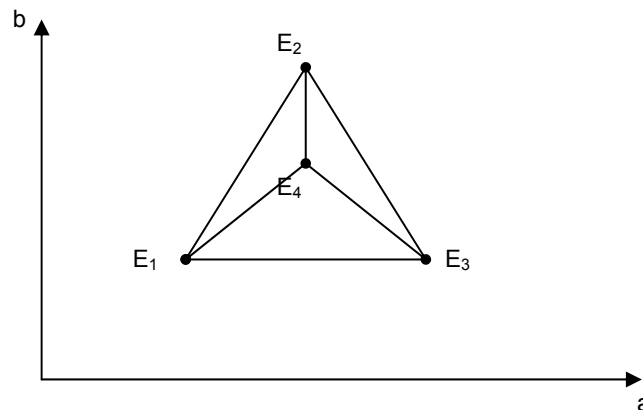
25. Commentez les affirmations suivantes reprises de Peter Ordeshook, *Game theory and political theory* (p. 65) et de Feldman/Serrano (p. 288) :

- « We are all accustomed to journalistic references to « nation acting », « legislatures choosing », « interest groups lobbying » and so forth. To act, to choose, or to lobby however implies the pursuit of some goal. But how can we speak of a legislature, an interest group or a nation, or any other collectivity « maximizing its utility or welfare » when the preferences of that group as its institutional structure reveals are intransitive? Further, terminology such as the « public interest » and « community goals » becomes immediately suspect. The literature of politics is replete with references to the public interest, either as justifications for specific policies or as explanations for specific events. The Condorcet paradox raises the possibility that none of this journalistic shorthand has a proper place in any adequate theory of political processes. »

- “The theorem provides an unambiguous answer to the question. “Is there a foolproof way to derive a complete and transitive social preference relation? The answer is No. This clearly negative result casts doubts on all assertions that there is a “general will”, a “social contract”, a “social good”, a “will of the people”, a “people’s government”, a “people’s voice”, a “social benefit” and so on and so forth. That is, it casts doubts on all notions that explicitly or implicitly attribute preference to society that are comparable to preference of an individual. Therefore it undermines vast areas of twentieth century social thought...”

- Référez-vous au « Du Contrat Social Volonté de tous » de J.-J. Rousseau et commentez le chapitre II du Livre II en relation avec la distinction introduite par Rousseau entre « volonté générale » et « volonté de tous ».

26. Soit les quatre points idéaux E_1 , E_2 , E_3 et E_4 de quatre votants.



Montrez que le point idéal E_4 est un point d'équilibre (en montrant que de chaque côté de n'importe quelle droite passant par E_4 , il existe au moins 2 points idéaux (en prenant en compte dans une telle somme le ou les points idéaux appartenant à cette droite)).

27. Supposons que 3 individus doivent partager un gâteau et supposons que les trois partages ci-après sont possibles :

$$x = \left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right), y = \left(\frac{3}{4} ; 0 ; \frac{1}{4}\right) \text{ et } z = \left(\frac{2}{5} ; \frac{2}{5} ; \frac{1}{5}\right).$$

- (i) En supposant que chaque individu préfère plus à moins, comment chaque individu va-t-il ranger ces trois états ?
- (ii) Si la société composée des trois individus adopte la règle de la majorité simple, quelle décision de partage du gâteau sera choisie ? Expliquez ce résultat.
- (iii) Supposons maintenant que le partage y est remplacé par $y' = \left(\frac{1}{2} ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$. Cela affecte-t-il votre conclusion sub (ii) ?

28. Analysez l'extrait suivant repris de Kenneth Shepsle, *Analyzing Politics*, p. 123 :

“To keep things as simple as possible, the legislation is taken to be a set of n individuals, where n is an odd number, and where everyone casts a vote. It makes decisions by majority rule. The most elementary situation, one that is examined first, is the unidimensional case in which legislature must choose a point on a line. Each legislator, i , has an ideal point x_i , and single-peaked preferences. The median voter is legislator m with ideal point x_m . We know in this circumstances that x_m can defeat any other point on the dimension in a majority contest (Blacks theorem). Perhaps more amazing is the fact that the median preferences prevail in a comparison between any two alternatives, so that if m prefers x to y then so does a majority for any x and y .

In addition to the preferences of the median legislation x_m two other distinguishing features are important. Whenever a legislature faces a decision-making opportunity, there is always a status quo policy in place, labeled x^0 . This is the current policy at the time of the legislative choice. It remains in place if the legislator chooses not to change it. The second feature of interest common to most legislatures is a division-of-labor arrangement known as a committee system. In such a system, a committee is a subset of the n legislators... The median ideal point of the committee members is labelled x_c . Just as majority preferences in the entire legislature are identical to the preferences of the legislature's median votes, majority preferences inside a committee are a copy of the preferences of the committee's median member. Because of these identities, much of our analysis need only consider x^0 , x_m and x_c .”

29. Analysez et commentez l'approche de Rawls « *combinant* » l'idée ou le concept du « *veil of ignorance* » avec le concept d'unanimité et celui

de « *bargaining* ». Dans ce contexte, considérez les extraits ci-après de sa Theory of Justice (p. 140) :

"... *each is forced to choose for everyone (en citant Rousseau)... The restrictions on particular information in the original position are, then, of fundamental importance. Without them we would not be able to work out any definite theory of justice at all... The veil of ignorance makes possible a unanimous choice of a particular conception of justice. Without these limitations of knowledge the bargaining problem of the original position would be hopelessly complicated. Even if theoretically a solution would exist we would not, at present anyway, be able to determine it...*"

30. Consultez le tableau de synthèse chez Nicolaus Tideman, *Collective Decisions and Voting*, Ashgate, 2006, p. 237, où l'auteur reprend tout un ensemble de caractéristiques ou axiomes que l'on pourrait 'attendre' d'un mécanisme de vote pour indiquer dans quelle mesure les différentes méthodes de vote les remplissent.

31. Soit la matrice des votes suivante :

	x	y	z	Total	Score Copeland	Nombre 1ières places
x	/	3	3	6	0+0=0	2
y	3	/	3	6	0+0=0	2
z	3	3	/	6	0+0=0	2

Quel est le profil des préférences sous-jacent ?

32. Commentez, à la lumière du modèle du votant médian, l'adage :

„*Wahlen werden in der Mitte gewonnen.*“

33. Analysez l'affirmation suivante reprise de Shmuel Nitzan, *Collective Preferences and Choice*, p. 47 :

"*Arrow's impossibility theorem implies that there is no positive answer to the normative question: "what is the appropriate social preference relation?", assuming that the "appropriate" social preference relation has to satisfy properties U [unrestricted domain], T [transitivity], P [Pareto principle], ND [Non-Dictatorship] and IIA [Independence of Irrelevant Alternatives].*

The theorem also implies that there is no positive answer to the positive question: "Is it possible to study social decision on the premise that such decisions, as in the context of individual decision making, can be rationalized by a plausible preference relation, where plausibility means that the social preference relation satisfies properties U, T, P, ND and IIA?"

In other words, since a plausible social preference relation does not exist, no social choice function can be rationalized by such a plausible relation. The study of social choice cannot therefore be based on the

fertile methodology that utilizes the rationality principle, which is so common in economics.”

34. Soit l'affirmation suivante :

« Il n'est pas téméraire de considérer que beaucoup d'hommes politiques cherchent à adopter des positions qu'ils pensent bien couvrir les préférences des électeurs. Un tel comportement ne doit ni étonner ni être considéré comme non souhaitable puisque dans une démocratie représentative que peut mieux faire un homme politique que de se faire l'écho des préférences des citoyens électeurs. »

Distinguez la partie positive de la partie normative et discutez la probabilité de la première et la pertinence de la seconde.

35. A la lumière de ce chapitre, discutez le concept de « tyrannie de la majorité ». Dans ce contexte, discutez également le concept de « coalition décisive ».

36. Analysez l'extrait suivant repris de Persson et Tabellini, *Political Economics*, 2000, MIT Press, p. 29 :

“In the case of genuine multidimensional policy conflict, the conditions for existence of a Condorcet winner ... become very strong. This has been forcefully demonstrated in the context of the multidimensional spatial voting model, which starts out from an a priori formulation of agents' preferences... These preferences have the general form $w(q - \alpha_i)$, where q is the policy vector and α_i a vector of coordinates describing voter i 's bliss point in this policy space. Also, W is assumed to be decreasing and concave – typically symmetric and often spherical – in the distance $\|q - \alpha_i\|$. Results due to Plott..., Davis, de Groot and Hinich..., and others demonstrate that the condition required for a point q^ to be a Condorcet winner is very strong. In particular, a hyperplane cutting through q^* in any direction must divide the set of bliss points into two subsets with an equal number of voters. This condition boils down to the existence of a “median in all directions”... A priori, such extreme symmetry in the distribution of individual bliss points seems an utterly unlikely occurrence, even though the intermediate preference property... implies that the individual bliss points lie along a continuous and monotonic curve in the policy area.”*

37. Supposons que dans le cadre d'un modèle à deux dimensions x_1 et x_2 , la fonction d'utilité d'un votant dont le point idéal est $E(x_1^*, x_2^*)$ est donnée par :

$$U = a_{11}(x_1 - x_1^*)^2 + 2a_{12}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + a_{22}(x_2 - x_2^*)^2$$

Discutez :

(i) le cas où $a_{12}=0$ et $a_{11}=a_{22}<0$. Quelle est la forme d'une courbe d'indifférence ?

- (ii) le cas où $a_{12}=0$ et $a_{11}<0$ et $a_{22}\neq a_{11}<0$. Quelle est la forme d'une courbe d'indifférence ?
- (iii) le cas où $a_{12}\neq 0$ et $a_{11}<0$ et $a_{22}\neq a_{11}<0$.
- (iv) Faut-il, en général, poser une condition de signe sur l'expression $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$?

38. Analysez l'extrait suivant repris de Jean-François Laslier, « *La Nouvelle Economie Politique* ». Analyse Economique du Vote, Mai 2003, Cahier n° 2003-010, CECO, Paris :

« Le résultat théorique sur lequel s'appuie une bonne partie des analyses de la nouvelle économie politique est connu sous le nom de « Théorème de l'électeur médian ». L'espace politique est supposé « unidimensionnel » ; l'exemple canonique est celui du choix d'un paramètre numérique, mais d'autres interprétations sont envisageables. Précisément, on suppose tout d'abord que l'ensemble des politiques possibles est totalement ordonné par un ordre « naturel » $<$. Si x et y sont deux politiques possibles, alors $x < y$ se lit : x est à gauche de y ».

La société est composée d'un certain nombre d'individus, nombre que nous supposons pour simplifier fini et impair. Chaque individu est pourvu d'une relation de préférence sur l'ensemble des politiques possibles. Ceci signifie que, entre deux politiques distinctes x et y , chaque individu i soit préféré strictement x à y (ce qui sera noté $x P_i y$), soit préféré y à x , soit est indifférent entre x et y .

On suppose alors les préférences individuelles « unimodales » par rapport à l'ordre naturel. Ceci signifie qu'il existe pour chaque individu i une politique possible $m(i)$ telle que :

$$\text{si } x < y \leq m(i) \text{ alors } y P_i x \text{ et si } m(i) \leq x < y \text{ alors } x P_i y.$$

Le point $m(i)$ est appelé le mode de préférence P_i , ou encore le point idéal de l'individu i . L'hypothèse d'unimodalité est souvent naturelle, elle est l'expression la plus simple de l'idée suivant laquelle chaque individu a une politique préférée et souhaite que la politique choisie soit la plus proche possible de cet idéal. En particulier, la préférence de l'individu sera unimodale de mode $m(i)$ si elle peut être représentée par une fonction d'utilité strictement croissante à gauche de $m(i)$ et strictement décroissante à droite de $m(i)$ (Figure 1).

Les points idéaux des différents individus étant naturellement ordonnés, et puisqu'il y a un nombre impair d'individus, un des points idéaux est le point idéal « médian ». Notons m^ ce point, le nombre d'individus i tels que $m(i) < m^*$ est strictement inférieur à la moitié de la population, et de même le nombre d'individus tels que $m(i) > m^*$. Sur la Figure 1, avec 7 individus, le point idéal médian est donc le quatrième. Un « électeur médian » est un individu dont le point idéal est médian, ici le quatrième individu. On peut noter qu'un individu à droite du*

médian, comme l'individu 5 sur la figure, préfère le point idéal médian à tout point à gauche de celui-ci.

La représentation unidimensionnelle de l'espace politique, suivant un axe « gauche-droite » est commune. En Economie, la représentation unidimensionnelle est plus particulièrement associée au nom de Hotelling, qui utilise cette métaphore pour expliquer pourquoi la concurrence entraîne l'uniformisation des produits, dans ce cas, le paramètre est une caractéristique d'un bien, par exemple la teneur en sucre du cidre. »

39. Une société est composée de cinq personnes dont les revenus sont, par ordre croissant respectivement 1, 2, 3, 5 et 9.
- (i) Calculez le revenu moyen et déterminez le revenu médian.
 - (ii) Supposons que les 5 personnes ont chacune une voix et doivent décider, à la majorité, entre :
 - un taux d'imposition du revenu de 0% ;
 - un taux d'imposition du revenu de 100% sur ceux ayant un revenu avant impôt supérieur au revenu moyen avant impôt avec répartition, à parts égales, de cet impôt entre les cinq individus.
 - (iii) Commentez ce résultat en termes de coalitions stables et de deadweight loss de l'impôt. (cf. Don Usher, *Political Economy*, Blackwell, 2003, p. 291).
40. Commentez l'extrait suivant faisant une différence entre vote au sens d'un Comité et vote de masse, repris de Enelow and Hinich, *The Spatial Theory of Voting*. An introduction, Cambridge University Press:
- "[There is a] fundamental difference between committee voting and mass elections. It is an important theme... that whereas these two types of voting can be analyzed spatially, two different spatial models are required to do so. Committee voting is generally characterized by a small number of well-informed voters who make choices from among a set of policy alternatives. Mass elections, on the other hand, feature a large number of voters who must choose from among a set of candidates on the basis of limited information."*
41. Commentez l'affirmation suivante en relation avec le mécanisme du referendum, reprise de George Tsebelis, *Veto players*, Russell Sage foundation, 2002, p. 10 :
- "... the possibility of referendum introduces an additional veto player (the median votes) and as a result referendum make the status quo more difficult to change and bring results closer to the position of the median ;... this conclusion or a variation of it (depending on the meaning of the words) may be at least one century old. Albert Venn Dicey said that the referendum "is at the same time democratic and conservative".(voir le chapitre 5 du livre de Tsebelis).*

42. Commentez l'affirmation suivante reprise de Batina and Ihori, *Public Goods*, Springer, 2006, p. 73) :

"Voting may be a very blatant tool for determining society's preferences for a particular policy. Many voters may not vote for a variety of reasons, e.g., alienation. A voting equilibrium may not exist. It may be impossible to ascertain the intensity of preference for one policy over another. Some voters may vote strategically in order to alter the outcome of the vote and coalitions may form for this express purpose. And in a dynamic context, the processed policy may not actually be implemented after the election; the policy may be time inconsistent."

43. Analysez le texte ci-après repris de Hinrich and Munger, *Analytical Politics*, Cambridge University Press, 1997, p. 86 :

"... we outlined the problems of defining a Condorcet winner in more than one dimension. We argued that the general condition for stability is the existence of a median in all directions... An alternative is a median in all directions if every line drawn through it divides the ideal points of all members so that at least half are on either side of the line. It is important to note that points on the line are counted as belonging to each of the two groups, or half-spaces."

This definition is designed for a two-dimensional policy space which is after all a two-dimensional surface. How are we to generalize two situations where there are more than two dimensions? Many people find it hard to visualize three dimensions, and we certainly can't represent three-space very well on a flat printed page. Worse, higher dimensions with 8 or 136 or any arbitrary number of policies, defy practical interpretations. We certainly cannot use "lines" to split groups of ideal points. Mathematicians use a mental construct called a "separating hyperplane" to understand such a splitting of spaces. We will denote the separating hyperplane H . In general, to split a space H must have one fewer dimension than the space itself.

... In the one dimensional example H [is] of dimension zero (a point). In two-dimensional spaces, H must be of dimension one (a line). In more complex spaces, with arbitrary dimension n , H must always be of dimension $n-1$. [For the purposes of our analysis], H must have the same property in a space of any dimension: No matter how H is tilted or rotated, as long as it passes through the median position, H must divide all ideal points so that (to use the Schwartz 1986 definition) no majority of ideal lies strictly on either side.

Obviously, this condition becomes harder to satisfy in higher dimensions. But the general principle... is precisely the same in every case: There must be at least $\frac{N}{2}$ ideal points on each side of the separating hyperplane (including in each case points on H itself)."

44. Joachim Weimann dans *Wirtschaftspolitik*, Springer, 2009, p. 205, définit la condition d'indépendance des alternatives irrelevantes (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen) comme:

„Die gesellschaftliche Präferenz bezüglich zweier Alternativen darf nur von den individuellen Ordnungen zwischen diesen beiden Alternativen abhängen, nicht jedoch von der Position einer dritten Alternative.“

Devait-on distinguer selon que la troisième alternative ne peut être qu'un des projets appartenant à la liste des projets au choix ou devrait-on viser également des projets qui ne figurent pas dans ladite liste ?

45. Analysez le cas ci-après appelé le paradoxe des trois référendums (cf. Jean-François Laslier, « *La Nouvelle Economie Politique* », Analyse Economique du Vote, Mai 2003, CECO, Paris). A quel paradoxe développé dans le corps du texte cet exemple s'apparente-t-il ?

« Il y a trois projets 1, 2 et 3. Pour chaque projet il y a deux possibilités, « oui » et « non », correspondant à la réalisation ou non du projet en question. Il est possible de réaliser les trois projets, ou seulement deux d'entre eux, ou un seul, ou aucun : les projets n'interfèrent pas les uns avec les autres au niveau de leur réalisation, il y a donc en tout huit programmes possibles.

Il y a trois individus : $i=1, 2, 3$. Les préférences individuelles sont les suivantes : Premier point, l'individu i dit « oui » au projet i et « non » aux deux autres projets. Deuxième point, pour comparer deux ensembles de projets, l'individu i s'intéresse en premier lieu au projet i . Par exemple la préférence de l'individu $i=1$ peut être la suivante :

*Programme préféré : (O1, N2, N3)
puis : (O1, O2, N3) ou (O1, N2, O3)
(O1, O2, O3)
(N1, N2, N3)
(N1, O2, N3) ou (N1, N2, O3)
(N1, O2, O3)*

Le programme (O1,N2,N3) est ici le préféré et (N1,O2,O3) le pire, ce qui correspond au fait que cet individu répond « oui » au projet 1 et « non » aux projets 2 et 3. Comme cet individu s'intéresse en premier lieu au projet 1, les quatre alternatives qui comportent la réalisation de ce projet sont aux premières places, et les quatre autres aux dernières. Supposons que les préférences des deux autres individus soient similaires, l'individu 2 jugeant d'abord d'après le projet 2 et l'individu 3 d'après le projet 3. Chacun des trois projets est jugé positivement par un individu et négativement par les deux autres. Donc la règle majoritaire s'applique bien à chaque projet, et aucun projet ne doit être réalisé. Le programme (N1,N2,N3) correspondant semble excellent. Pourtant on constate que le programme (O1,O2,O3) qui consiste, au contraire, à réaliser les trois projets est unanimement préféré à (N1,N2,N3).

Cet exemple montre que, sous des hypothèses raisonnables, il est possible de faire l'unanimité contre un ensemble de projets qui sont

chacun majoritaires et qui sont sans lien les uns avec les autres, tant du point de vue de leur faisabilité que du point de vue des préférences individuelles. Si les trois projets sont soumis à trois référendums ils sont tous les trois rejetés, alors que tous les individus préféreraient qu'ils soient tous les trois acceptés. »

46. Commentez l'extrait suivant repris de Pierre Favre, *La décision de majorité*, p. 47, où l'auteur discute l'existence d'équivalents dans d'autres domaines du paradoxe (effet) de Condorcet :

« Le deuxième exemple que nous pouvons rapporter est celui de la règle de fer qui fut préconisée en matière de variantes pour les éditions de textes anciens, et notamment pour les éditions de la Bible. La « règle de fer » consiste, en présence de différentes variantes, à choisir celle qui est reproduite dans la majorité des manuscrits. Dans bien des cas, le résultat est incohérent. Illustrons-le d'un exemple volontairement outré. Un éditeur de saint Augustin dispose de trois manuscrits et se trouve en présence des trois phrases suivantes :

- *Dieux, créateur de toutes choses se soumet infiniment les rois de ce monde.*
- *Dieu créateur de toutes choses, impose sa toute puissance aux rois de ce monde.*
- *Nul n'osera penser que Dieu se soumet infiniment aux rois de ce monde.*

L'auteur observe que certains membres de phrase se retrouvent d'une variante à l'autre, et réécrit donc les trois versions en colonne :

<i>Dieu créateur de toutes choses</i>	<i>se soumet infiniment</i>	<i>les rois de ce monde</i>
<i>Dieu créateur de toutes choses</i>	<i>impose sa toute puissance</i>	<i>aux rois de ce monde</i>
<i>Nul n'osera penser que Dieu</i>	<i>se soumet infiniment</i>	<i>aux rois de ce monde</i>

Il peut alors appliquer la règle de fer..., ce qui donne malheureusement la phrase :

Dieu créateur de toutes choses se soumet infiniment aux rois de ce monde. »

47. Soit le profil des préférences suivant :

Groupe I	1000	x	y	z	t
Groupe II	1000	y	z	t	x

- (i) Quel projet sera le Condorcet winner et lequel sera le Borda winner ?

(ii) Supposez que le profil soit :

Groupe I	1000	x	y	z	t
Groupe II	1000	y	z	t	x
Groupe III	1	t	x	y	z

Quel projet sera alors le Condorcet winner et lequel le Borda winner ?

48. Commentez le texte ci-après repris de Ted Bergstrom, *Public Goods and externalities*, Lecture 3, 2002 :

“The undisputed standard graduate public finance textbook when I was in graduate school in the 1960’s was Richard Musgrave’s The Theory of Public Finance. In this book, Musgrave proposes that the main economic functions of government could be divided among three branches, the Allocation, the Distribution, and the Stabilization Branches of government. The job of the Allocation Branch is to “secure adjustments in the allocation of resources”. The job of the Distribution Branch is to “secure adjustments in the distribution of income and wealth”, and the job of the Stabilization Branch is to secure “economic stabilization”.

Musgrave suggests that we think of each branch as run by a “manager” who is instructed to “plan his job on the assumption that the other two branches will perform their functions properly.” Thus the Allocation Branch proceeds on the “assumption of full employment of resources and that the proper distribution of income has been secured.” The distribution branch assumes that “a full-employment income is available for distribution and that the satisfaction of public wants is taken care of.” Similarly for the Stabilization Branch – (but I’m afraid my class never got as far as the stabilization part of Musgrave’s book.)

Musgrave’s proposed division of labor was and is an attractive one. A good part of the appeal of the separation is that it approximately coincides with lines of specialization in the academic world. The Stabilization Branch could be staffed by macroeconomists, the Allocation Branch by microeconomists and the Distribution Branch by welfare economists, ethical philosophers, and perhaps a few stray theologians and political scientists. The macroeconomists and microeconomists would never have to communicate directly and the microeconomists would rarely have to communicate with the Distribution mélange.

In this lecture we consider the relation between the Allocation Branch and the Distribution Branch. In case utility is quasi-linear, this relation is especially simple. In fact, the Allocation Branch can get its job done while paying almost no attention to the actions of the Distribution Branch. As you recall from our discussion in the last chapter, if there is quasilinear utility, then so long as the Allocation Branch knows that the Distribution Branch is not going to be so cold-hearted as to leave some consumers with zero private goods, there is a unique Pareto optimal

amount of public goods. All the Allocation Branch needs to do is to solve for the Pareto optimal quantity of public goods and provide it.¹

But in general, the Allocation Branch will not be able to determine the right amount of public goods to supply unless it knows what the Distribution Branch is doing. This makes life more complicated, but does not necessarily mean that we must abandon Musgrave's program of divisional separation. Recall that Musgrave's suggestion was not that each branch should ignore the actions of the others, but rather that each branch should assume that the other branches "will perform their functions properly".

49. Commentez les réflexions introductives de Slavoj Zizek dans son livre *Vivre la fin des temps*, Flammarion, 2011 :

« Le vingtième anniversaire de la chute du mur de Berlin aurait dû nous donner à réfléchir. C'est devenu un cliché de souligner la nature « miraculeuse » de cette chute... Avec la désintégration des régimes communistes, qui se sont effondrés tels des châteaux de carte, il s'est passé quelque chose d'inconcevable, qu'on n'aurait même pas envisagé deux ou trois mois avant. Qui en Pologne aurait pu imaginer des élections libres portant Lech Walesa à la présidence ? Pourtant, un « miracle » autrement remarquable devait se produire quelques années plus tard : le retour au pouvoir des ex-communistes par la vertu du scrutin démocratique, et la marginalisation d'un Walesa devenu moins populaire encore que le général Wojciech Jaruzelski qui, quinze ans plus tôt, avait tenté d'écraser Solidarnosc par un coup d'Etat.

L'explication qu'on donne en général de ce dernier renversement renvoie aux attentes utopiques « unimature » d'une majorité animée de désirs contradictoires, ou, plutôt, inconsistants. Le peuple voulait le beurre et l'argent du beurre : il voulait la liberté capitaliste-démocratique et l'abondance matérielle, mais sans payer le prix fort de la vie dans une « société du risque », c.-à-d. sans renoncer à la sécurité et la stabilité que garantissent (plus ou moins) les régimes communistes. »

50. Supposons que le profil des préférences pour trois candidats et 10 millions d'électeurs soit :

Groupe I	5 millions	$T > V > J$
Groupe II	5 millions	$V > J > T$

- (i) Quel candidat l'emporte à la majorité simple ?
- (ii) Quel candidat l'emporte à la méthode de Condorcet ?
- (iii) Quel candidat l'emporte à la méthode de Borda ?

¹ At the time when Musgrave's book was written, public finance economists paid little attention to the problem of how the Allocation Branch was to find out the utility functions of consumers who would be willing to tell the truth about their preferences only if it was in their interest. Perhaps if Musgrave were writing this book today, he would add an Investigative branch, or to make it sound a little less sinister, an Econometric Survey Research branch.

(iv) Maintenant, supposons qu'il s'ajoute au groupe I un votant, donc que le groupe I ait 5.000.001 électeurs. Cela va-t-il affecter les conclusions sub. (i), (ii) et (iii) ?

51. Supposons que les préférences de la population par rapport à trois candidats dans le cadre d'élections présidentielles se déroulant en deux tours soient :

40% z y x
39% x y z
21% y z x

(i) Montrez que y sera écarté au premier tour.

(ii) Montrez que z remportera le deuxième tour malgré le fait qu'une majorité absolue (60% des électeurs) préfère le candidat y, éliminé au premier tour, au candidat z, élu au deuxième tour.

52. Soient 3 projets, disons x, y, z. Montrez qu'il existe 6 possibilités logiques de ranger les 3 projets.

Soient 2 votants. Montrez qu'il existe 21 profils de préférences. [Notez que des profils de préférence comme (R_2, R_3) et (R_3, R_2) ne sont comptés qu'une fois, car analytiquement ils sont identiques].

53. Analysez le livre de Gustave Le Bon, *Psychologie des foules*, 1885, à la lumière de la théorie des jeux et de la théorie du choix social.

54. Commentez les affirmations suivantes :

- « *Il est souvent plus facile de dégager une majorité contre un projet que de dégager une majorité pour un projet.* »
- « *Il est souvent plus facile de dégager une majorité qui exprime son désaccord avec une décision prise qu'une majorité qui exprime son soutien à la décision prise.* »

55. Passez en revue les exemples du chapitre en appliquant la méthode du scrutin à la majorité absolue. Que constatez-vous ?

56. Dans la théorie microéconomique du choix du consommateur, il est généralement supposé que les préférences sont réflexives, complètes et transitives, ce qui, entre autres, se traduit dans le fait que deux courbes d'indifférence d'un consommateur ne peuvent pas se couper.

Dans les 'Welfare economics' et surtout dans les théories de l'échange international, on recourt souvent au concept de courbe d'indifférence sociale (ou communautaire), dite aussi courbe d'indifférence de Scitovsky.

Discutez ce concept qui se définit par rapport aux courbes d'indifférences individuelles de deux ou plusieurs consommateurs. Ces courbes d'indifférences sociales peuvent-elles se couper ? Liez cette

conclusion au théorème d'impossibilité d'Arrow (pour une présentation du concept de courbe d'indifférence sociale, cf. par exemple de Melo et Grether, *Commerce international*, De Boeck, 1997).

57. Soit un championnat de courses de voitures. Il y a 10 courses. A chaque course participent toujours les mêmes 20 conducteurs. Dans une course, le vainqueur obtient 10 points, le second 6, le troisième 4, le quatrième 3, le cinquième 2, le sixième 1 point. Les autres n'en obtiennent pas.

Le championnat est gagné par celui qui a fini par avoir obtenu le total de points le plus élevé après les 10 courses.

Analysez cette façon de déterminer le champion.

58. On doit déterminer quelle ville pourra organiser un grand événement. Trois villes sont en lice. Il y a 100 personnes qui doivent décider. Chaque personne a une voix. La procédure de décision est la suivante.

Au premier tour, on élimine la ville qui obtient le moins de voix. Au deuxième tour, on oppose les deux villes restantes et l'emportera la ville qui obtiendra alors le plus de voix.

Analysez cette méthode de vote. Puis, réfléchissez si l'on pouvait organiser ces tours de la sorte à ce qu'il ne faudrait voter qu'une seule fois.

59. Supposez que l'Etat demande pour l'utilisation de toutes les routes un péage.

Un tel système peut-il remplacer l'impôt (a) pour le financement des autoroutes et (b) en général ?

Si l'Etat prélève des accises sur l'essence et le gasoil routier et affecte directement (« *earmarking* ») ces recettes pour des dépenses de construction et d'entretien des autoroutes, un tel système d'accises est-il équivalent à un système de péage ?

Même question si l'Etat prélève une taxe annuelle sur les voitures privées et affecte cette taxe à la même fin.

En quoi tous ces systèmes se distinguent-ils (a) l'un par rapport à l'autre et (b) par rapport à l'impôt sur le revenu ?

60. Quelqu'un a le choix entre les trois projets x, y et z. Ses préférences sont $y \succ z \succ x$ et il choisit y. Maintenant, supposez qu'il n'a plus que le choix entre les projets y et z et qu'il choisit alors z. Considériez-vous cette personne comme « *cohérente* » ?

61. La procédure de l'élection du pape entre les cardinaux se déroule comme suit :

- (i) L'élection a lieu à la majorité des deux tiers des cardinaux participant au conclave si le nombre des électeurs est divisible par trois, sinon à la majorité des deux tiers plus une voix, chaque cardinal participant au conclave ayant le droit de vote passif et actif.
- (ii) Si après trente-quatre tours de scrutin, aucun candidat n'obtient deux tiers des voix, l'élection se fait à la majorité absolue, à condition qu'une majorité absolue accepte ce changement de procédure. Dans ce dernier cas, le choix est limité aux deux cardinaux arrivés en tête lors du dernier scrutin.

Examinez cette procédure de vote. La possibilité sub (ii) a été introduite par Jean-Paul II. Avant ne s'appliquait que la règle sub (i). Quel est l'impact possible de cette modification, notamment sur le plan de la possibilité de votes stratégiques ?

- (iii) Benoît XVI (cf. Henri Tincq, *Les Catholiques*, Grasset 2008) a publié le 26 juin 2007, un motu proprio (décret) dans lequel il défait la modification de Jean-Paul II. Dorénavant, il faudra de nouveau, peu importe le nombre de jours écoulés et le nombre de tours de vote, une majorité de deux tiers.

Lequel des deux papes a été le plus inspiré par la théorie des choix sociaux en situation de jeu ?

62. Commentez le passage suivant en relation avec les élections au Royaume-Uni du 5 mai 2005:

“Dock Kennedys (Président du parti libéral) buhlen um die Stimmen aus dem Labour-Lager könnte wegen der Besonderheiten des britischen Wahlkampfes den Konservativen zugute kommen. In den 646 Wahlbezirken zieht jeweils der Kandidat mit den meisten Stimmen ins Parlament. Wenn Labour und die LibDems sich den Zuspruch der Mitte und der Linken teilen, könnten die Tories von Michael Howard lachender Dritter sein. Labour appelliert daher an das taktische Verständnis der Bürger. „Geh mit Charlie ins Bett, dann wachst du mit Howard auf“, warnt die Partei auf Bierdeckeln in Pubs und Discos“ (Financial Times, 28 avril 2005).

63. Suite à un tremblement de terre local, un grand trou s'ouvre dans la terre. Ce trou n'arrange personne, sauf une.

Analysez les interrogations suivantes tournant autour du concept d'unanimité et de statu quo et comparez-les :

- (i) Faut-il fermer le trou ?
- (ii) Faut-il le laisser ouvert ?
- (iii) Faut-il retourner à l'état avant tremblement de terre ?

(iv) Faut-il modifier l'état après tremblement de terre ?

64. Soit le profil des préférences suivant pour 7 votants et 5 projets :

a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

(i) Quel est le choix sur la base de la majorité simple ?

(ii) Quel est le choix selon la méthode de Borda ?

(iii) Existe-t-il un Condorcet winner ?

(iv) Quel est le choix selon la méthode de Hare ? (exemple tiré de Alan Taylor, *Mathematics and Politics*).

65. *"If you live in Phoenix, Arizona, and aspire to the housing of the already well-to-do, the political ideology which says "don't get equal, get richer", is underpinned by the real possibility of carving out in the desert another equally attractive community. If you live in London, you are involved in a competition for a limited supply of locationally specific desirable houses. Relative income and wealth matter and will matter increasingly in the future ... Housing is an inherently 'positional', locationally specific good: it is, in economist's terms, highly 'contested' while software is the least contested of goods (it can be provided at roughly the same cost to 1 million people as it can be to one), housing is the most contested. If I own a house you want, not only does it cost real resources to build an equivalent, but in some circumstances it is just impossible to do so..."*

*The more that goods and services are uncontested, the more valid is the conservative philosophy that society should aim to get richer than the more equal, that only absolute income matters, not relative. But with positional goods, that logic cannot hold: what matters is one's income relative to others, not one's absolute income. That is true of all positional goods – fine wine, works of art, antiques – but in most cases the importance of this fact of life to public policy is slight. But housing matters because it is one of consumer's largest expenditure items and most people's largest store of wealth." (Adam Turner, dans *Just capital*)*

Commentez cette affirmation.

66. La personne x est européenne et champion du Monde dans une discipline donnée, toutefois elle n'est pas champion d'Europe dans cette même discipline.

Cette situation viole-t-elle le principe de l'indépendance des alternatives irrelevantes (ou non pertinentes) ?

67. Les résultats des élections britanniques du 5 mai 2005 ont été approximativement les suivants:

	% voix	nombre sièges
Labour	36 %	355
Conservateurs	33 %	197
Libéraux	22 %	62
Autres	9 %	26

Le taux de participation a été de quelque 60 %.

(i) Quel est le pourcentage des électeurs potentiels qui ont voté pour Labour ?

(ii) Quelle est la particularité du système électoral britannique qui fait qu'avec 36% des voix exprimées, un parti peut obtenir une majorité absolue au niveau du Parlement ?

68. Commentez les deux citations (repris de J.L. Boursin, *Des préférences individuelles aux choix collectifs*) de respectivement Pascal et Platon :

- « Pourquoi suit-on la pluralité ? Est-ce à cause qu'ils ont plus de raison ? Non, mais plus de force... Ne pouvant faire qu'il soit force d'obéir à la justice, on a fait qu'il soit juste d'obéir à la force ; ne pouvant fortifier la justice, on a justifié la force, afin que la justice et la force fussent ensemble, et que la paix fût, qui est le souverain bien. » (Pascal, *Pensées*, 285 et 286)

- « L'erreur commence lorsque vous pensez qu'il faut prendre l'avis du plus grand nombre sur la justice et l'injustice, le bien ou le mal, l'honneur ou la déshonneur » (Platon, *La République*)

69. - Pouvez-vous trouver un exemple qui infirmerait l'affirmation qu'un Condorcet winner n'est jamais un Borda loser ?

- Pouvez-vous trouver un exemple qui infirmerait l'affirmation qu'un Condorcet loser n'est jamais un Borda winner ?

- Pouvez-vous trouver un exemple qui infirmerait l'affirmation qu'un Condorcet winner est classé mieux dans la méthode de Borda qu'un Condorcet loser ?

70. Soit le profil des préférences suivant :

A	x	y	z	t
B	x	y	z	t
C	z	y	t	x
D	t	y	z	x

Quel projet l'emporte si les scores de Borda sont 3, 2, 1 et 0 ?

Quel projet l'emporte si les scores sont $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ et 0 ? Quel projet

l'emporte si les scores sont $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ et 0 ?

Notez que les trois échelles de score ne sont pas « *equally distanced* ».

71. Commentez l'extrait suivant repris de Pierre Basieux, *Abenteuer Mathematik*, rororo, 1999 :

„Solche Paradoxien bei Mehrheitsentscheidungen sind spätestens seit dem Marquis de Condorcet (1743 bis 1794), dem „letzten“ der französischen Aufklärungsphilosophen des 18. Jahrhunderts bekannt und stellen keine spitzfindig ausgedachten Ausnahmefälle dar, sondern vielmehr, wie wir heute wissen die Regel. Bei mehr als einem Entscheidungsträger und bei mehr als zwei Alternativen gibt es kein noch so kompliziertes Auswahlverfahren welches sowohl demokratisch ist als auch zu rationalen kollektiven Entscheidungen führt. Dies ist die dramatische Konsequenz des Unmöglichkeitssatzes von Kenneth Arrow, Sozial- und Wirtschaftswissenschaftler.

Es gibt also kein prinzipiell widerspruchsfreies Auswahlverfahren in der Demokratie – was nicht etwa heißen soll, dass Demokratie und Vernunft keine gemeinsamen, miteinander verträglichen Bereiche hätten; dies gilt nur nicht zwangsläufig. Insofern ist Demokratie kein sozialpolitisches Allheilmittel, sie kann Barbarei nicht verhindern...

Der Unmöglichkeitssatz zeigt, dass alle Versuche, ein perfektes demokratisches Wahlsystem zu konstruieren, das nie zu paradoxen Ergebnissen führt, zum Scheitern verurteilt ist. Jedes Wahlschema wird bisweilen Unzulänglichkeiten aufweisen. Somit ist auch der Marktmechanismus kein Auswahlverfahren, das rationale kollektive Entscheidungen garantiert. Diese Konsequenz zerstört die Träume unzähliger Sozialphilosophen, die über ein Jahrhundert lang nach gerechten, nicht manipulierbaren Wahlsystemen gesucht hatten.“

72. Lisez le chapitre 6 sur la fameuse condition of independance of irrelevant alternatives (IIA) d'Arrow telle que présentée et critiquée par Mackie dans le chapitre 6 de son livre *Democracy Devended*.

73. Albert O. Hirschman, dans son livre *Exit, Voice and Loyalty*, Harvard University Press, a introduit les concepts de "Voice" et d'"Exit" qui, en relation avec une entreprise, ont les significations ci-après.

Par « *Exit* », on entend le fait que des clients insatisfaits cessent d'acheter le produit d'une entreprise donnée qui alors prend connaissance d'une insatisfaction des clients en observant une demande diminuée qui s'adresse à elle.

Par « *Voice* », on entend le fait que les clients insatisfaits s'adressent directement à l'entreprise pour passer le message de l'insatisfaction.

Appliquez ces deux concepts aux partis politiques.

74. Dans le référendum en France du 29 mai 2005 portant sur la nouvelle Constitution européenne, 55% des votants se prononçaient pour le non, 45% pour le oui. Le taux de participation a été de 70%.

(i) Commentez la validité des deux affirmations suivantes :

- « *Même pas un tiers de la population ayant le droit de voter s'est prononcé pour la Constitution.* »

- « *Presque $\frac{2}{3}$ de la population ayant le droit de vote ne se sont pas prononcés contre la constitution.* »

(ii) En vous inspirant de la section 4.5.7. portant sur les pièges possibles d'un referendum, expliquez pourquoi le « non » l'a emporté.

(iii) Comment aurait-on pu construire le référendum pour que le oui l'aurait remporté ?

75 Commentez la présentation et l'utilisation faite du théorème d'impossibilité d'Arrow dans l'extrait suivant repris de Timothy Besley, *Principled Agents*, Oxford University Press, 2006, p. 21 :

"Making sense of good government requires a performance metric. The standard economic notion is social welfare. This is usually invoked in a context where the "inputs" into social welfare are individual utility levels (This idea that social welfare is solely a function of such data is known as welfarism). The task is then to provide a means of aggregating these utility levels to form a societal measure of well-being...

There are two levels of attack [to this approach]. The first questions the very idea of the common good. This would include concerns following the discovery of Arrow's impossibility theorem. Arrow examined the possibility of deriving social welfare from individual preferences in the absence of interpersonal comparisons of utility. By producing his impossibility theorem, his work appeared to be a significant set-back in the quest for giving a scientific foundation for social welfare and hence for notions of common good. However, as Sen has emphasized, one key issue concern the assumption made about interpersonal comparisons. If interpersonal comparisons are allowed, social welfare functions can be derived which satisfy Arrow's axioms. These include utilitarianism and Rawlsianism."

76. Commentez l'affirmation suivante:

"There are many examples of well-known policy rules in economics that are derived from considerations of Pareto efficiency, for example the Lindahl-Samuelson rule for the efficient provision of a public good says that the sum of marginal rates of substitution should be equal to the marginal rate of transformation. However, this does not define a unique policy – it is consistent with many different levels of the public

good being provided, depending on the distribution of resources in the economy." (T. Besley, *Principled Agents*, Oxford University Press, 2006, p. 24).

77. Une fédération est composée de quatre membres à dimensions partiellement différentes de la sorte à ce que l'Etat A a 4 voix, l'Etat B en a 4 voix, l'Etat C a 3 et l'Etat D, le plus petit, a une voix. Les décisions sont prises à la majorité simple de 7 voix.

Montrez que l'Etat D ne joue, dans aucun scénario, un rôle sur le plan d'une décision à prendre.

Montrez que tel serait également le cas si D avait deux voix, bref montrez que D ait 2, 1 ou 0 voix, cela revient toujours strictement au même.

78. Quelle est la valeur de Shapley-Shubik du Grand-Duché de Luxembourg dans le cadre de la répartition des votes entre les Etats-membres de l'UE ? A-t-elle changé au fil du temps ?
79. Commentez l'extrait suivant repris de A. Comte-Sponville, *La Philosophie*, Que sais-je, 2005 :

« Dans une assemblée, il s'agit moins d'avoir raison que d'emporter l'adhésion du plus grand nombre. Mais cette logique, pour Socrate, n'en est pas une puisqu'aucune vérité ne se vote (la raison n'est pas soumise au principe majoritaire) et puisqu'aucun vote n'est gage de vérité. »

80. Commentez l'affirmation suivante :

- Le principe arithmétique majoritaire est une condition nécessaire mais pas suffisante aux processus décisionnels en démocratie.

81. Analysez la « *loi de Duverger* » selon laquelle une élection reposant sur le principe majoritaire (« *winner-take-all/plurality* ») tend à éliminer les petits partis pour aboutir à un système à deux partis.
82. Commentez l'extrait suivant repris de Michael Walzer, *Spheres of Justice*, Basic Books, 1983 :

"One citizen / one vote is the functional equivalent, in the sphere of politics, of the rule against exclusion and degradation in the sphere of welfare, of the principle of equal consideration in the sphere of office, and of the guarantee of a school place for every child in the sphere of education. It is the foundation of all distributive activity and the inescapable framework within which choices have to be made. But choices have to be made; and these depend not on single votes but on the accumulation of votes – hence on influence, persuasion, pressure, bargaining, organization and so on..."

83. Commentez les affirmations ci-après reprises d'Anthony Downs, *An Economic Theory of Democracy*, Addison Wesley, 1957:

- *"In this study, government is defined as that specialized agency in the division of labor which is able to enforce its decision upon all other agencies or individuals in the area. A democratic government is one chosen periodically by means of popular elections in which two or more parties compete for the votes of all adults.*

A party is a team of individuals seeking control the government apparatus by gaining office in an election. Its function in the division of labour is to formulate and carry out government policies whenever it succeeds in getting into power. However, its members are motivated by their personal desire for the income, prestige and power which come from holding office. Thus, carrying out their social function is to them a mean of achieving their private ambitions. Though this arrangement may seem odd, it is found throughout the division of labour because of the prevalence of self-interest in human action.

Since none of the appurtenances of office can be obtained without being elected, the main goal of every party is the winning of elections. Thus all its actions are aimed at maximizing votes, and it treats policies merely as means towards this end." (p. 35)

- *"... it is likely that in multiparty systems [three or more major parties], parties will strive to distinguish themselves ideologically from each other and maintain the purity of their positions whereas in two-party systems, each party will try to resemble its opponent as closely as possible." (p. 127)*

84. Commentez l'affirmation suivante:

"Die Demokratie lebt von Voraussetzungen, die sie selbst nicht schaffen kann." (affirmation attribuée au juriste catholique E.W. Böckenförde, un élève du très controversé Carl Schmitt).

85. Discutez le pour et le contre de la possibilité du panachage (la possibilité d'inscrire sur un bulletin de vote (de cocher sur un bulletin de vote) les noms d'un nombre donné de candidats appartenant à quelques ou à toutes des listes en compétition).

86. Commentez l'analyse de William H. Riker, *Liberalism against populism*, p. 90:

"The Borda count is... a simple version of scoring methods that is, of ascertaining the order of alternatives based on the net number of positions of precedents. It is important not to think of the Borda score as some kind of utility function. Just because a voter places x first among five (4 points) does not mean he or she likes x twice as much as y in third place (2 points). The points are simply a device to count "aheadness". This definition of winning in terms of "aheadness" is what renders the Borda count especially attractive for many people. It is also, however, what renders it especially vulnerable to strange and

paradoxical results where the number of alternatives is varied. In such circumstances, there are problems with all voting system but the Borda count seems particularly prone to such distortions."

87. Analysez le profil des préférences ci-après, pour 5 votants et 5 projets:

x	y	a	b	c
y	a	c	b	x
c	x	y	a	b
x	y	b	c	a
y	b	a	x	c

88. Soient 3 individus P_1 , P_2 et P_3 et un gâteau à partager entre les 3. Soit un partage A où P_1 obtient 40% du gâteau, P_2 obtient 40% et P_3 obtient 20%. Par rapport à ce partage de départ, supposez qu'un autre partage est proposé et soumis à la majorité, à savoir le partage B où P_1 aura 45%, P_2 aura 45% et où P_3 n'aura que 10%. Le partage B sera-t-il choisi à la majorité ? Commentez ce résultat.

89. Le jeudi 12 juin 2008 le peuple islandais dans un referendum a rejeté à la majorité le Traité de Lisbonne. Commentez les extraits suivants de Le Monde :

« Le non islandais montre qu'il n'est pas possible de réformer l'Union si la règle de l'unanimité n'est pas abandonnée. Or, pour passer outre en l'état actuel des traités, il faut l'unanimité. »

90. Commentez l'extrait ci-après repris de Cass Sunstein, *Infotopia*, Oxford University Press, 2006, et portant sur le « jury theorem » de Condorcet :

"Notwithstanding its simplicity, the Jury Theorem has implications for all sorts of questions including the justification of democracy itself. Its importance lies in the demonstration that groups are likely to do better than individuals, and large groups better than small ones, if majority rule is used and if each person is more likely than not to be correct."
Que se passe-t-il si chaque personne a plus de probabilité de se tromper que non?

91. Analysez l'extrait suivant repris de Feldman and Serrano, *Welfare Economics and Social Choice Theory*, 2nd edition, Springer, p. 15:

"Suppose some likes apples (A) better than bananas (B) and bananas better than cherries (C), but is indifferent between apples and cherries. Than his preferences relation is $A > B$, $B > C$, and $A \sim C$. This doesn't violate acyclicity since there is no preferences cycle. (If $C > A$ holds, there is a cycle). But the preference relation is not quasi-transitive, since quasi-transitivity would requie $A > C$. Preferences can be acyclic without being quasi-transitive.

92. Analysez les règles de vote de l'allocation du prix Gouncourt (cf. site du Goncourt), le plus connu des prix littéraires français attribué chaque année en novembre. Pour les amis de la littérature, analysez les règles respectivement du prix Renaudot, du prix Médicis et du prix Interalliés.

93. Cherchez différentes règles de vote dans différents domaines de la vie démocratique, politique, économique, sociale, culturelle ou sportive et comparez-les.

94. Analysez, commentez et donnez des exemples en relation avec l'affirmation suivante de William Riker :

"The absence of political equilibrium means that outcomes depend not simply on participants' values and constitutional structures, but also on matters such as whether some people have the will or wit to vote strategically, whether some leader has the skill, energy, and resources to manipulate the agenda, or whether some backbencher – in a committee or out – has the imagination and determination to generate a cyclical majority by introducing new alternatives and new issues." (*Liberalism against populism*, p. 200).

95. (i) Analysez et commentez l'extrait suivant repris de Donald Saari, *Chaotic Elections*, 2001, p. 5 après vous être renseigné sur le fonctionnement de l'Electoral college dans les élections présidentielles aux Etats-Unis :

"The only way to eliminate the Electoral college [in the US Presidential elections] is with a Constitutional amendment. For passage, the amendment must be ratified by two-thirds of the House and of the Senate. While such a vote may be possible, the real hurdle is that the amendment must also be ratified by three-fourths of the states. This state support is extremely unlikely to even materialize if only for the simple but pragmatic reason of 'political power' or maybe to ensure a small state's comfortable survival."

(ii) Lire aussi le chapitre 3 de William Poundstone, *Gaming the vote*, et plus particulièrement l'analyse du vote dont est sorti comme président des Etats-Unis Abraham Lincoln.

96. Cherchez à expliquer l'affirmation suivante de Hervé Moulin (p. 17) :

"The celebrated impossibility result due to Arrow states that no social welfare function simultaneously :

- *can yield rational collective preferences at every profile of individual preferences (as Borda's method does but Condorcet's does not);*
- *base the collective opinion between two outcomes solely on the profile of individual opinions between these two outcomes (as Condorcet's but not Borda's method does)."*

97. Commentez l'affirmation suivante de Dan Usher, à la lumière notamment de ce chapitre et du chapitre 4 (*The Economic Prerequisite of Democracy*, Columbia University Press, 1981) :

"Property, if it is to be justified at all, must be justified in the interest of the propertyless, or at least in the interest of the majority of voters whose property is small by comparison with the great fortunes. Failing

that, the rules of property will, and in my opinion should, be modified until the condition holds. And if no adjustment to the rules of property is sufficient, than the institution of property will and should be abolished altogether."

98. Analysez et comparez les affirmations suivantes:

- *"The identification of welfare with preferences and of preferences with choice is an intellectual construction at the centre of modern economic theory."* (Hervé Moulin, p. 108)
- *"This dual link between choice and preference on the one hand and preference and welfare on the other is crucial to the normative aspects of general equilibrium theory. All the important results in the field depend on this relationship between behaviour and welfare through the intermediary of preferences."* (A. Sen)
- *"Preferences play a dual role in welfare economics. First they act as determinants of choices: people choose A over B because they prefer A to B. Second they provide the basis for passing judgments about society's welfare; if people prefer A to B, it must be because A will add more to their welfare [and so they choose A over B, it is because they prefer A over B i.e. because A will add more to their welfare than B]."*

If "welfare" or good is to be defined as what people prefer then we would not be making any substantive proposition about psychology of people's choices. We would merely be proposing a definition of welfare. This could not be a positive proposition about people's behaviour since definitions are not up to empirical verification." (Beckerman. Economics as applied Ethics, Palgrave, 2011).

99. Analysez la méthode de vote de l'IOC pour désigner les villes organisatrices des Jeux Olympiques.

100. Soit le profil des préférences ci-après :

Groupe I	7	A	B	C
Groupe II	4	B	C	A

Montrez que A l'emporte à la majorité, que A est le Condorcet winner et le Borda winner.

Supposons que le profil change de par l'ajout de trois groupes :

Groupe III	4	A	C	B
Groupe IV	4	C	B	A
Groupe V	4	B	A	C

Montrez que le Condorcet winner change pour devenir le projet B. Qu'en est-il du Borda winner ?

101. Dans beaucoup de pays, spécificités mises à part, on a des systèmes multi-partis où il doit se former une coalition. Le chef

d'Etat (président, roi, grand-duc, etc.) charge après les élections le chef d'un des partis gagnants de former une coalition. Des négociations s'ensuivent, plus ou moins longues et difficiles, entre les différents partis susceptibles de former le Gouvernement. Il y est question du programme gouvernemental futur et de personnes comme le nombre de membres au Gouvernement et de leurs postes respectifs. Pourrait-on concevoir un système de vote tel que les électeurs puissent également s'exprimer sur les coalitions désirables ?

102. Discutez le rôle du consensus dans un groupe (relativement) petit. Discutez les définitions possibles d'un groupe (relativement) petit. En quoi une certaine homogénéité des préférences est-elle importante ?

Le Luxembourg est-il un pays petit ? Est-ce que les préférences tendent à devenir plus homogènes ou moins homogènes au fil du temps ?

103. (i) Commentez, à la lumière de ce chapitre et des chapitres précédents, l'affirmation suivante reprise de l'excellent article de Robert Imman, *Markets, Governments and the « New » Political Economy*, chapter 12 du *Handbook of Public Economics*, volume II, 1987 :

“The essence of each of the five market failures detailed above [Quelles sont ces market failures, selon vous? Vérifiez dans l'article] is the need for some institutions to overcome the proclivity of individual, self-seeking agents to act uncooperatively when cooperation among agents is needed for a mutually beneficial trade. Markets as institutions for organizing economic activity often cannot be designed to prevent individual cheating against a mutually preferred cooperative outcome. In such cases a cooperative agreement among all parties is required, and an extra-market institution – possibly a government – will be needed to enforce it... The failure of market institutions to achieve an economically efficient or fair allocation of social resources has raised the possibility that a government might somehow do it better. Voluntary collective organizations where individuals are free to stay or go were seen to suffer from the same fundamental problems which plagued markets. A coercive government with the power to tax and spend is necessary if we are to achieve cooperative allocations. Yet we do not wish our government to be oppressive. Nor do we want collective decision-making to be too administrative cumbersome and expensive. Can we find, therefore, a government which respects individual preferences for collective activities, is administratively efficient and, finally, capable of finding economically efficient allocation of social resources? The answer as shown by Arrow is no. We therefore stand at a crossroad, and we must choose. One route takes us to dictatorial, often unfair, but potentially efficient, allocation process. The other road leads to democratic, potentially more equitable, but generally inefficient mechanisms.”

104. Analysez et commentez l'article 51 de la Constitution luxembourgeoise et la loi électorale modifiée du 18 février 2003.

105. Commentez l'affirmation suivante de Robert Cooter (*The Strategic Constitution*, p. 146) :

"I have explained that direct democracy causes the median voter to prevail on each dimension of choice, which is better than a cycle, or a political cartel and worse than perfect bargaining by elected representatives. This proposition summarizes the main difference in theory between direct and indirect democracy."

106. (i) Analysez et commentez l'article 229 du Code de procédure civil:

« Art. 229. Les jugements seront rendus à la pluralité des voix, et prononcés sur-le-champ :... »

(ii) Cherchez d'autres dispositions similaires.

Lectures utiles

Les lecteurs qui veulent se familiariser plus avec le genre de réflexions de la première partie de ce chapitre peuvent utilement consulter :

- John Leach, *A course in Public economics*, Cambridge University Press 2004, un livre excellent.
- Joseph E. Stiglitz, *Economics of the Public Sector*, 3rd edition, November, 2000, le très bon textbook d'un prix Nobel d'économie.
- Richard and Peggy Musgrave, *Public finance in theory and practice*, 5th edition, 1989, Mc Graw-Hill, un classique en la matière. Bien des gens d'ailleurs estiment que Richard Musgrave (1910-2007) aurait mérité le prix Nobel d'Economie.
- Xavier Greffe, *Economie des politiques publiques*, 2ème édition, Dalloz, 1997.
- Lee Friedman, *The microeconomics of public policy*, Princeton University Press, 2002.
- Ewald Nowotny, *Der öffentliche Sektor*, Springer, vierte Auflage, 1999.
- Donald Campbell, *Incentives*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2006, un livre très bien fait.
- Allan Feldman and Roberto Serrano, *Welfare Economics and Social Choice Theory*, 2nd edition, Springer, 2006, un livre pédagogiquement très bien fait.
- Dennis Mueller, *Public Choice III*, Cambridge University Press, 2003, une référence.
- Dietmar Wellisch, *Finanzwirtschaft I*, Verlag Vahlen, 2000, un livre concis, très bien fait.

Les lecteurs qui veulent creuser l'analyse du vote et de façon plus générale la théorie du choix social, peuvent utilement se référer à:

- Peter Ordeshook, *Game theory and political theory*, Cambridge University Press, 1986, et *A Political Theory Primer*, Routledge, 1992.
- Hannu Nurmi, *Comparing Voting Systems*, Kluwer, 1987, *Voting paradoxes and how to deal with them*, Springer, 1999, *Models of Political Economy*, Routledge, 2006. Les écrits de Nurmi sont très clairs et à recommander.
- Donald G. Saari, *Decisions and Elections. Explaining the unexpected*, Cambridge University Press, 2001, un livre excellent et *Chaotic Elections. A mathematician looks at Voting*, AMG, 2000, le très

technique *Basic Geometry of Voting*, Springer, 1995, et *Disposing Dictators, Demystifying Voting Paradoxes*, Cambridge University Press, 2008. Les contributions de Saari sont fondamentales.

- Hervé Moulin, *Fair Division and Collective Welfare*, MIT Press, 2003.
- Alan Taylor, *Mathematics and Politics*, Springer 1995.
- Steven J. Brams, *Mathematics and Democracies*, Princeton University Press, 2008.
- Steven Brams and Peter Fishburn, *Approval voting*, Springer, 2007, 2nd edition, et *Social Choice and the Mathematics of Manipulation*, Cambridge University Press, 2005.
- J. Hodge and R. Klima, *The Mathematics of Voting and Elections*, AMS, 2005.
- Jean-Louis Boursin, *Des Préférences individuelles aux choix collectifs*, Economica, 1995 et *Les Paradoxes du Vote*, Odile Jacob, 2004.
- Helmut Laux, *Entscheidungstheorie*, 5te Auflage, Springer, 2003.
- Michael Allingham, *Choice Theory. A very short introduction*, Oxford University Press, 2002.
- Robert Cooter, *The Strategic Constitution*, Princeton University Press, 2000.
- Michael Dummett, *Voting Procedures*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
- Jean-José Quiles, *Economie du choix social*, Bréal, 2003.
- John Craven, *Social Choice*, Cambridge University Press, 1992.
- Fishburn Peter, *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, 1973.
- J.-F. Laslier, *Le vote et la règle majoritaire*, CNRS Editions, 2004.
- Austen-Smith and Banks, *Positive Political Theory I and II*, Michigan, 2000 and 2005.
- Pierre Favre, *La décision de majorité*, Presses de la Fondation nationale des Sciences Politiques, 1976.
- Nicolaus Tideman, *Collective Decisions and Voting*, Ashgate, 2006.

- Shmuel Nitzan, *Collective Preference and Choice*, Cambridge University Press, 2010.¹
- Robert Cooter, *The Strategic Constitution*, Princeton University Press, 2000.
- Wulf Gaertner, *A Primer in Social Choice Theory*, Oxford University Press, 2009.
- Kenneth Shepsle, *Analytical Politics*, Norton, 2nd edition, 2010.
- M. Hinich and M. Munger, *Analytical Politics*, Cambridge University Press, 1997.
- Th. Schwartz, *The Logic of Collective Choice*, Columbia University Press, 1986.
- Paul Johnson, *Social Choice*, Sage University Press, 1998, un petit fascicule pédagogiquement très bien fait et qui constitue une très bonne introduction en la matière.
- John Bonner, *Politics, Economics and Welfare*, Harvester Press, 1986.
- L. Kern und J. Nida-Rümelin, *Logik kollektiver Entscheidungen*, Oldenbourg, 1994.
- W. Poundstone, *Gaming the vote*, Hill and Wang, 2008, un livre qui s'inscrit dans le journalisme scientifique anglo-saxon de haute qualité.
- Georges Szpiro, *Numbers Rule*, Princeton University Press, 2010.
- D. Green and I. Shapiro, *Pathologies of Rational Choice Theory. A critique of applications in political science*. Ce livre développe une vue critique de l'approche du choix rationnel dans les analyses politiques.
- Ted Bergstrom, *Theory of Public Goods and Externalities*, Economics 230B, UCSB (ces mots clés suffisent pour accéder à ce texte à travers Google), 2002.

Les classiques sur le plan de la théorie du choix social sont :

- Kenneth Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Cowles Foundation, 1951.
- Anthony Downs, *An Economic Theory of Democracy*, Addison-Wesley, 1957.
- Duncan Black, *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, 1958.

¹ Ce livre est bon, mais on s'étonne quelques fois des choix dans le monde académique de non-référence, en l'occurrence p.ex. le fait que Saari et Riker ne figurent pas dans la bibliographie.

- James Buchanan and Gordon Tullock, *The calculus of consent*, University of Michigan Press, 1962.
- Amartyra Sen, *Collective Choice and Social Welfare*, North Holland, 1970.
- Robin Farquharson, *Theory of Voting*, Yale University Press, 1973.
- William Riker, *Liberalism against Populism*, Waveland Press, 1982.
- Gerry Mackie, *Democracy Defended*, Cambridge University Press, 2003.